4 4 4 4 4 4

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

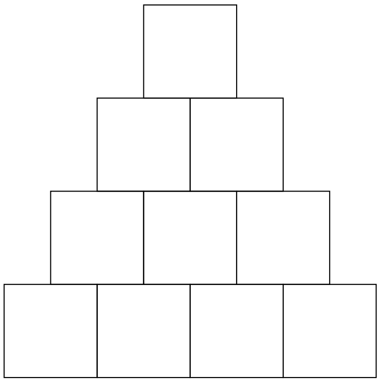
HEXAGON of Maths & Science

Tìm Kiếm Tài năng Toán học trẻ

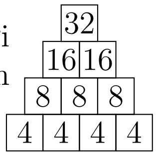
Đề thi gồm 06 câu hỏi, in trên 01 trang giấy. Thời gian làm bài 120 phút.

1. Từ các số tự nhiên từ 1 đến 203, bạn Linh liệt kê các số chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 2 và thấy có đúng L số như vậy. Bạn Khánh thì liệt kê các số chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3 và thấy có đúng K số như vậy. Tính giá trị của $K - L$.

2. Hình vẽ bên là một hình tháp gồm 10 ô vuông. Người ta điền vào mỗi ô vuông một số tự nhiên sao cho không kể các ô trong hàng dưới cùng thì số ghi trong mỗi ô bằng tổng hai số ghi trong hai ô liền dưới nó.

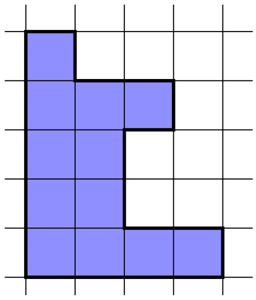


Ví dụ, có thể điền mười số tự nhiên vào hình tháp như sau.



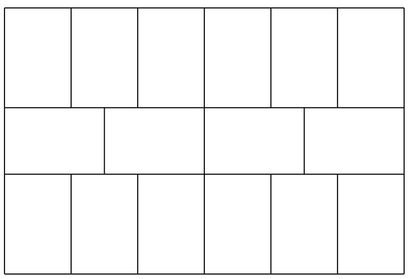
Thầy Thuận muốn một cách điền thỏa mãn yêu cầu trên mà có đúng 4 số chẵn. Em hãy chỉ ra một cách điền giúp thầy Thuận.

3. Em hãy chia hình có đường viền tô đậm thành hai hình giống hệt nhau bằng cách cắt theo đường lưới ô vuông. Hai hình được coi là giống hệt nhau nếu chúng có thể chồng khít lên nhau.



4. Có ba tấm thẻ ghi số 1, một tấm thẻ ghi số 5, một tấm thẻ ghi số 7 và một tấm thẻ ghi số 8. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số khi đặt sáu tấm thẻ này trên cùng một hàng?

5. Một hình chữ nhật được ghép bởi 16 hình chữ nhật nhỏ giống hệt nhau, như hình bên. Biết rằng chu vi của mỗi hình chữ nhật nhỏ bằng 40 cm, tìm chu vi của hình chữ nhật lớn.



6. Trong một khu rừng có 6 con kỳ nhông đỏ, 3 con kỳ nhông xanh, 11 con kỳ nhông vàng. Mỗi lần hai con khác màu gặp nhau thì cả hai con cùng đổi sang màu thứ ba. Có thể có xảy ra trường hợp cả 20 con đều thành một màu không? Tại sao?

5 5 5 5 5 5

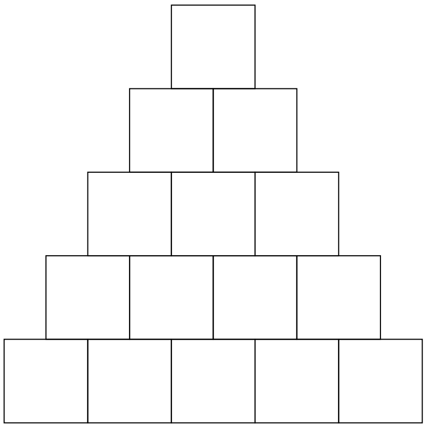
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

HEXAGON of Maths & Science

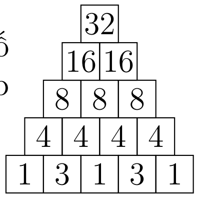
Tìm Kiếm Tài năng Toán học trẻ

Đề thi gồm 06 câu hỏi, in trên 01 trang giấy. Thời gian làm bài 120 phút.

1. Hình vẽ bên là một hình tháp gồm 15 ô vuông. Người ta điền vào mỗi ô một số tự nhiên sao cho không kể các ô trong hàng dưới cùng thì số ghi trong mỗi ô bằng tổng hai số ghi trong hai ô liền dưới nó.



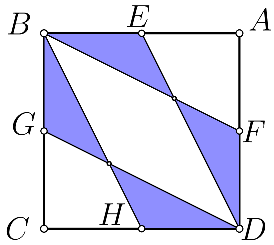
Ví dụ, có thể điền số tự nhiên vào hình tháp như sau.



Thầy Thuận muốn một cách điền thỏa mãn yêu cầu trên mà có đúng 5 số chẵn. Em hãy chỉ ra một cách điền giúp thầy Thuận.

2. Có một tấm thẻ ghi số 0, hai tấm thẻ ghi số 1, một tấm thẻ ghi số 5, một tấm thẻ ghi số 7 và một tấm thẻ ghi số 8. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số khi đặt sáu tấm thẻ này trên cùng một hàng?

3. Cho $ABCD$ là một hình vuông. E, F, G, H lần lượt là các điểm chính giữa của các cạnh $AB, AD, BC,$ và CD. Biết rằng diện tích hình vuông $ABCD$ bằng 120 cm^2, tính diện tích phần tô đậm.

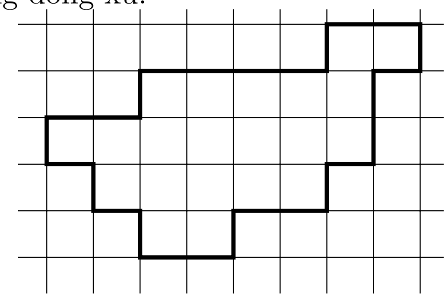


4. Thầy Dư có 4 đồng xu khác nhau. Trên mỗi mặt của từng đồng xu có ghi đúng một chữ cái. Biết rằng từ những đồng xu này, thầy Dư có thể xếp được các từ sau

H O I, T O A N, T I N, T A I, N A N G

Hãy xác định các cặp chữ cái viết trên từng đồng xu.

5. Chia hình có đường viền in đậm sau đây thành ba hình giống hệt nhau bằng cách cắt theo đường lưới ô vuông. Hai hình được coi là giống hệt nhau nếu chúng có thể chồng khít lên nhau.



6. Trong một khu rừng có 6 con kỳ nhông đỏ, 3 con kỳ nhông xanh, 11 con kỳ nhông vàng. Mỗi lần hai con khác màu gặp nhau thì cả hai con cùng đổi sang màu thứ ba. Có thể có xảy ra trường hợp cả 20 con đều thành một màu không? Tại sao?

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

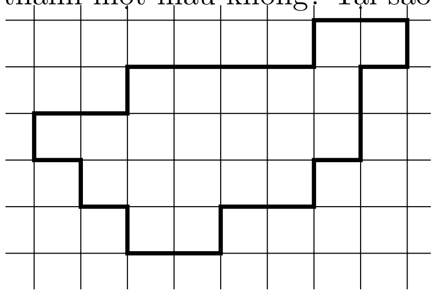
HEXAGON of Maths & Science

Tìm Kiếm Tài năng Toán học trẻ

Đề thi gồm 06 câu hỏi, in trên 01 trang giấy. Thời gian làm bài 120 phút.

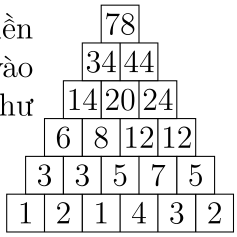
1. Trong một khu rừng có 6 con kỳ nhông đỏ, 3 con kỳ nhông xanh, 11 con kỳ nhông vàng. Mỗi lần hai con khác màu gặp nhau thì cả hai con cùng đổi sang màu thứ ba. Có thể có xảy ra trường hợp cả 20 con đều thành một màu không? Tại sao?

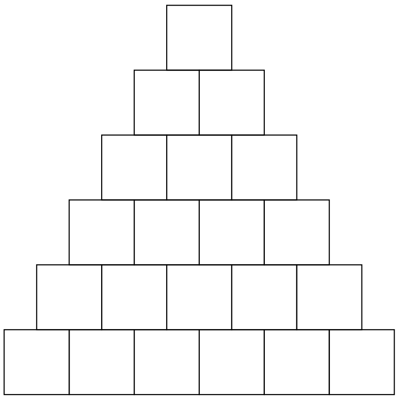
2. Cắt hình có đường viền tô đậm sau đây thành ba hình bằng nhau. Yêu cầu cắt theo lưới ô vuông. Hai hình được coi là bằng nhau nếu chúng có thể chồng khít lên nhau.



3. Hình vẽ bên là một hình tháp gồm 21 ô vuông. Người ta điền vào mỗi ô một số tự nhiên sao cho không kể các ô trong hàng dưới cùng thì số ghi trong mỗi ô bằng tổng hai số ghi trong hai ô liền dưới nó.

Ví dụ, có thể điền số tự nhiên vào hình tháp như sau.





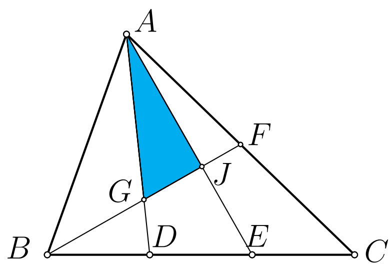
Thầy Thuận muốn một cách điền thỏa mãn yêu cầu trên mà có đúng 7 số chẵn. Em hãy chỉ ra một cách điền giúp thầy Thuận.

4. Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương có hai chữ số mà tổng các chữ số của mỗi số đó chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 2?

5. Trong tam giác ABC, lấy các điểm D, E trên cạnh BC sao cho $BD = DE = EC$ và điểm F trên AC sao cho $AF = FC$. Biết rằng diện tích của tam giác ABC là 480 cm^2, tính diện tích của

(a) tam giác BGD;

(b) tam giác AGJ.



6. Có N em học sinh đứng thành vòng tròn, đánh số lần lượt là 1, 2, 3, ..., N theo chiều kim đồng hồ. Em số 1 ở lại, em số 2 đi ra khỏi vòng, em tiếp theo ở lại, em tiếp theo nữa lại đi ra khỏi vòng, tiếp tục như thế, cứ cách một em thì lại có một em bị loại ra, vòng tròn thưa dần cho đến khi chỉ còn lại một em.

(a) Nếu $N = 32$ thì em cuối cùng còn lại là em số mấy?

(b) Nếu $N = 2017$ thì em cuối cùng còn lại là em số mấy?

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

HEXAGON of Maths & Science

Tìm Kiếm Tài năng Toán học trẻ

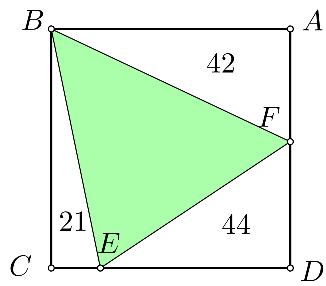
Đề thi gồm 06 câu hỏi, in trên 01 trang giấy. Thời gian làm bài 120 phút.

1. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a, b, c, d) thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$ab = c + d, \quad \text{và} \quad a + b = cd.$$

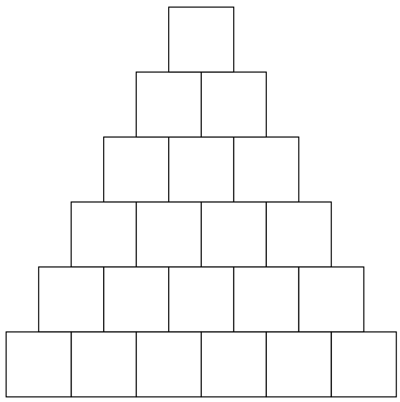
2. Cho năm số thực (không nhất thiết phân biệt) có tổng bằng 18, đồng thời tổng ba số tùy ý trong năm số đó không âm. Gọi ℓ là số nhỏ nhất trong năm số đó. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của ℓ.

3. Cho hình vuông $ABCD$. Hai điểm E, F lần lượt thuộc cạnh CD và DA sao cho diện tích các tam giác BCE, EDF và ABF lần lượt là 21 cm^2, 44 cm^2 và 42 cm^2. Tính diện tích tam giác BEF.

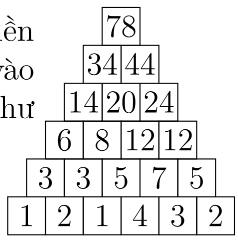


4. Có 2017 em học sinh đứng thành vòng tròn, đánh số từ 1 đến 2017 theo chiều kim đồng hồ. Em số 1 ở lại, em số 2 đi ra khỏi vòng, em tiếp theo ở lại, em tiếp theo nữa lại đi ra khỏi vòng, tiếp tục như thế, cứ cách một em thì lại có một em bị loại ra, vòng tròn thưa dần cho đến khi chỉ còn lại một em. Hỏi đó là em số mấy?

5. Hình vẽ bên là một hình tháp gồm 21 ô vuông. Thầy Thuận điền vào mỗi ô một số tự nhiên sao cho không kể các ô trong hàng dưới cùng thì số ghi trong mỗi ô bằng tổng hai số ghi trong hai ô liền dưới nó.

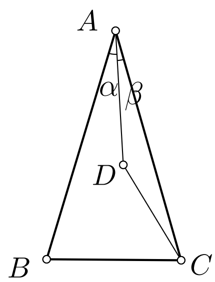


Ví dụ, có thể điền số tự nhiên vào hình tháp như sau.



Hỏi thầy Thuận có thể viết được ít nhất là bao nhiêu số CHẴN ở trong hình tháp? Tại sao?

6. Tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D trong tam giác sao cho $AD = BC$ và $\angle DAB = \alpha, \angle DAC = \beta$. Biết $\alpha + 3\beta = 60^\circ$. Tính $\angle DCA$ theo α và β.



HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

HEXAGON of Maths & Science

Tìm Kiếm Tài năng Toán học trẻ

Đề thi gồm 06 câu hỏi, in trên 01 trang giấy. Thời gian làm bài 120 phút.

1. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a, b, c, d) thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$ab = c + d \quad \text{và} \quad a + b = cd.$$

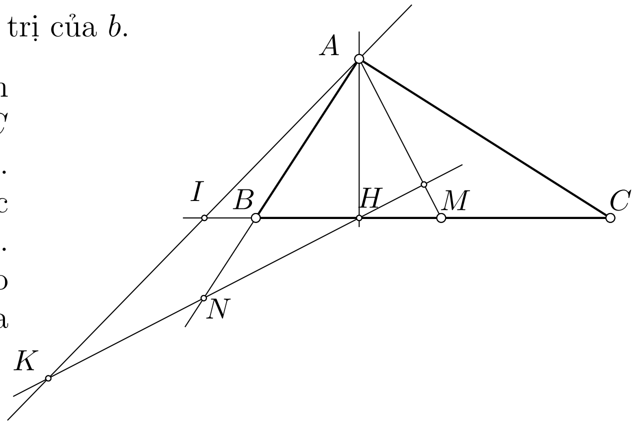
2. Cho bốn số thực (không nhất thiết phân biệt) có tổng bằng 172, đồng thời tổng hai số tùy ý trong bốn số luôn không âm. Gọi ℓ là số nhỏ nhất trong bốn số, hỏi giá trị nhỏ nhất của ℓ bằng bao nhiêu?

3. Giả sử đa thức $q(x)$ thỏa mãn

$$x^{17} = (x^3 - x^2 - x + 1)q(x) + ax^2 + bx + c,$$

trong đó a, b, c là ba số thực. Tìm giá trị của b.

4. Cho tam giác vuông ABC có cạnh huyền BC và đường cao AH. Trên HC lấy điểm M sao cho $MC = 2MH$. Đường thẳng ℓ đi qua H vuông góc với AM và cắt AB (kéo dài) tại N. Trên tia đối của NH lấy K sao cho $NH = NK$. Gọi I là giao điểm của BC và AK. Tính tỉ số IK/AK.

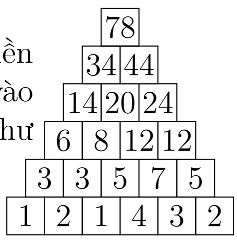


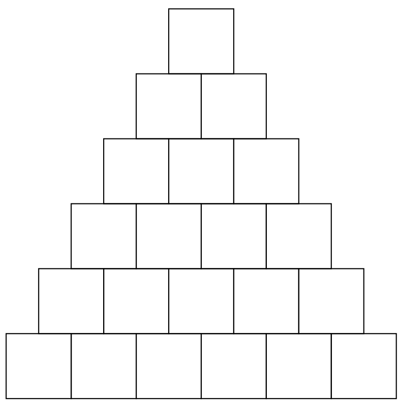
5. Có 7 em học sinh thi đấu bóng bàn. Trong ngày thứ nhất, mỗi em có thể chưa đấu trận nào hoặc đã thi đấu một hoặc nhiều hơn một trận. Biết rằng trong hôm đó, mỗi em thắng không quá 1 trận. Chứng minh rằng

(a) trong 4 em tùy ý có ít nhất hai em chưa đấu với nhau;

(b) hết ngày thi đấu thứ nhất, để chuẩn bị cho ngày tiếp theo ta luôn có thể xếp 7 em thành ba nhóm sao cho các em thuộc cùng mỗi nhóm thì chưa đấu với nhau trận nào.

6. Hình vẽ bên là một hình tháp gồm 21 ô vuông. Thầy Thuận điền vào mỗi ô một số tự nhiên sao cho không kể các ô trong hàng dưới cùng thì số ghi trong mỗi ô bằng tổng hai số ghi trong hai ô liền dưới nó.
Ví dụ, có thể điền số tự nhiên vào hình tháp như sau.





Hỏi thầy Thuận có thể viết được ít nhất là bao nhiêu số CHẴN ở trong hình tháp? Tại sao?

9 9 9 9 9 9

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

HEXAGON of Maths & Science

Tìm Kiếm Tài năng Toán học trẻ

Đề thi gồm 06 câu hỏi, in trên 01 trang giấy. Thời gian làm bài 120 phút.

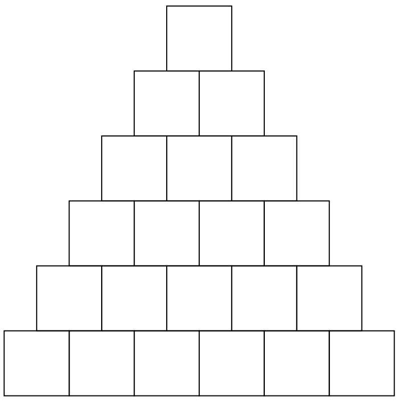
1. Cho bốn số thực (không nhất thiết phân biệt) có tổng bằng 172, đồng thời tổng hai số tùy ý trong bốn số luôn không âm. Gọi ℓ là số nhỏ nhất trong bốn số, tìm giá trị nhỏ nhất của ℓ.

2. Cho $f(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 - x^2 - x - 1$ và $g(x) = x^3 - x^2 - 5x - 1$. Biết rằng phương trình $g(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c, tìm giá trị của

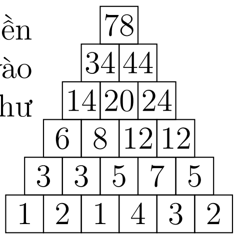
$$f(a) + f(b) + f(c).$$

3. Tìm tất cả các cặp số (p, n) trong đó p là số nguyên tố, n là số nguyên dương sao cho $p^n + 144$ là một số chính phương.

4. Hình vẽ bên là một hình tháp gồm 21 ô vuông. Thầy Thuận điền vào mỗi ô một số tự nhiên sao cho không kể các ô trong hàng dưới cùng thì số ghi trong mỗi ô bằng tổng hai số ghi trong hai ô liền dưới nó.



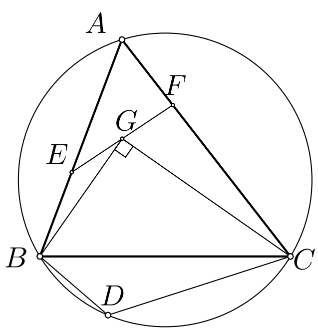
Ví dụ, có thể điền số tự nhiên vào hình tháp như sau.



Hỏi thầy Thuận có thể viết được ít nhất là bao nhiêu số CHẴN ở trong hình tháp? Tại sao?

5. Có 100 vận động viên tham gia một giải thi đấu bóng bàn theo thể thức loại trực tiếp, nghĩa là vận động viên thua sẽ bị loại ngay (không có trận đấu hòa). Theo thể lệ cuộc thi, hai vận động viên chỉ có thể được thi đấu với nhau *nếu chênh lệch giữa số trận đã thi đấu của họ không quá 1*. Biết rằng cuối cùng, chỉ còn lại đúng một người vô địch, tất cả vận động viên khác đều đã bị loại. Hỏi nhà vô địch thể thắng nhiều hơn 9 trận được không? Tại sao?

6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn γ như hình vẽ. Điểm D nằm trên cung BC không chứa A của γ. Gọi E, F lần lượt là hai điểm trên cạnh AB, AC sao cho $BD = BE$ và $CD = CF$. Gọi G là trung điểm của EF. Chứng minh rằng BG vuông góc với GC.



HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Tìm Kiếm Tài năng Toán học trẻ

Đề thi gồm 06 câu hỏi, in trên 01 trang giấy. Thời gian làm bài 120 phút.

1. Cho hai số thực x, y thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$A = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+x^2}.$$

2. Tìm tất cả các cặp số (p, n) trong đó p là số nguyên tố, n là số nguyên dương sao cho $p^n + 144$ là một số chính phương.

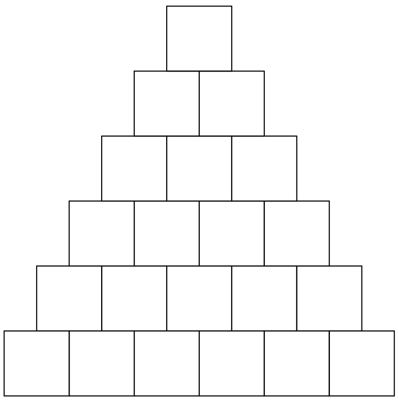
3. Cho $f(x)$ là một đa thức bậc 2016 sao cho

$$f(1) = 1,\ \ f(2) = \frac{1}{2},\ \ f(3) = \frac{1}{3},\ \ \ldots,\ \ f(2017) = \frac{1}{2017}.$$

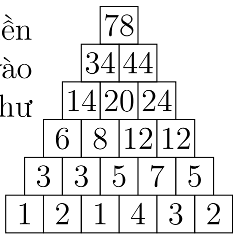
Tính giá trị của $f(2018)$.

4. Có 100 vận động viên tham gia một giải thi đấu bóng bàn theo thể thức loại trực tiếp, nghĩa là vận động viên thua sẽ bị loại ngay (không có trận đấu hòa). Theo thể lệ cuộc thi, hai vận động viên chỉ có thể được thi đấu với nhau *nếu chênh lệch giữa số trận đã thi đấu của họ không quá 1*. Biết rằng cuối cùng, chỉ còn lại đúng một người vô địch, tất cả vận động viên khác đều đã bị loại. Hỏi nhà vô địch thể thắng nhiều hơn 9 trận được không? Tại sao?

5. Hình vẽ bên là một hình tháp gồm 21 ô vuông. Thầy Thuận điền vào mỗi ô một số tự nhiên sao cho không kể các ô trong hàng dưới cùng thì số ghi trong mỗi ô bằng tổng hai số ghi trong hai ô liền dưới nó.

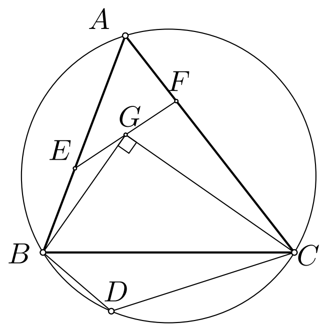


Ví dụ, có thể điền số tự nhiên vào hình tháp như sau.



Hỏi thầy Thuận có thể viết được ít nhất là bao nhiêu số CHẴN ở trong hình tháp? Tại sao?

6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn γ như hình vẽ. Điểm D nằm trên cung BC không chứa A của γ. Gọi E, F lần lượt là hai điểm trên cạnh AB, AC sao cho $BD = BE$ và $CD = CF$. Gọi G là trung điểm của EF. Chứng minh rằng BG vuông góc với GC.



.

| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |

.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Tìm Kiếm Tài năng Toán học trẻ

0.1 Lớp 4

1. Trước tiên ta tính L. Số số chia hết cho 3, nhỏ hơn 203 là

$$\lfloor 203/2 \rfloor = 67.$$

Số số chia hết cho 6 là

$$\lfloor 203/6 \rfloor = 33.$$

Suy ra, $L = 67 - 33 = 34$. Tương tự, ta tính được số $K = 101 - 33 = 68$. Do đó,

$$K - L = 68 - 34 = 34.$$

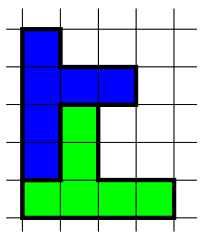
Nội dung	**Điểm**
Tính được giá trị $K = 67$	1
Tính được giá trị $L = 33$	1
Tính được đáp số đúng 34	3

2. Ví dụ, có thể điền như sau

17
7 10
3 4 6
2 1 3 3

Chỉ ra được cách điền 4 số chẵn là cho điểm tối đa.

3. Thí sinh cần chỉ ra đáp án bằng hình vẽ, tương tự như hình bên.



4. *Cách 1.* Coi ba số 1 là khác nhau, thì ta có $6! = 720$ cách sắp xếp. Thực chất, ba số 1 không phân biệt được nên đáp số là $720/(3!) = 120$.

Cách 2. Chọn ví trí cho số 5: có 6 cách chọn. Chọn vị trí cho số 7: có 5 cách chọn. Chọn vị trí cho số 8: có 4 cách chọn. Chọn vị trí cho số 1: có 1 cách chọn. Vậy tổng số cách chọn là $6 \times 5 \times 4 = 120$.

Nội dung	**Điểm**
Tính được đáp số đúng, cách làm tương đương hoặc khác	5

5. Chiều dài của hình chữ nhật lớn được chia thành sáu phần, mỗi phần bằng chiều rộng của hình chữ nhật nhỏ. Chiều dài của hình chữ nhật lớn cũng được chia thành 4 phần, mỗi phần bằng chiều dài của hình chữ nhật nhỏ. Suy ra, tỉ lệ chiều rộng và chiều dài của hình chữ nhật nhỏ bằng $\frac{2}{3}$. Lưu ý, nửa chu vi của hình chữ nhật nhỏ là 20. Ta chia 20 cm thành 5 phần bằng nhau, thì mỗi phần là 4 cm. Suy ra chiều rộng chiếm 2 phần, tức là 8 cm, chiều dài chiếm 3 phần, tức là 12 cm.

   Do đó, chiều rộng hình chữ nhật lớn là $12+12+8=32$ cm, chiều dài hình chữ nhật lớn là $6\times 8=48$. Chu vi hình chữ nhật lớn là

$$2\times(32+48)=160.$$

Nội dung	**Điểm**
Lập luận, tính toán được tỉ lệ giữa chiều rộng, chiều dài của hình chữ nhật nhỏ bằng $\frac{2}{3}$	2
Tính được giá trị đáp số đúng 160	3

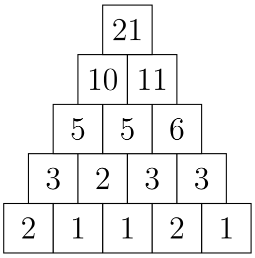
6. Có thể. Ví dụ, đầu tiên 1 con kỳ nhông đỏ gặp 1 con kỳ nhông vàng và chúng đổi thành 2 con kỳ nhông xanh. Ta có 5 kỳ nhông đỏ, 5 kỳ nhông xanh, 10 kỳ nhông vàng. Tiếp theo, 5 con kỳ nhông đỏ gặp 5 con kỳ nhông xanh, chúng biến thành kỳ nhông vàng. Tức là ta sẽ được 20 kỳ nhông vàng.

$$(6,3,11)\to(5,5,10)\to(0,0,20).$$

Nội dung	**Điểm**
Cho điểm tối đa với bài có lời giải đúng	5

0.2 Lớp 5

1. Có thể điền 5 số chẵn, chẳng hạn



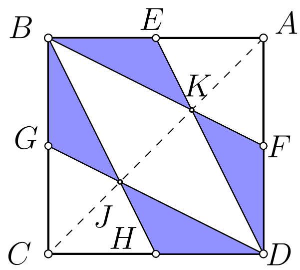
Cách điền khác mà có giá trị nhỏ nhất vẫn là 5 thì cho điểm tối đa.

2. Gọi số cần tìm là $N = \overline{abcdef}$. Giả định rằng ta coi hai số 1 khác nhau. Vị trí a có 5 lựa chọn, vị trí b có 5 lựa chọn, vị trí c có 4 lựa chọn và vị trí d có 3 lựa chọn, ví trí e có 2 lựa chọn, vị trí f có 1 lựa chọn. Do đó, số số N là $5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5 \times 120$. Tuy nhiên, hai số 1 kia thực chất là một, nên đáp số là

$$5 \times 120/2! = 300.$$

Có đáp án đúng, cho điểm tối đa.

3. Ký hiệu (ABC) là diện tích tam giác ABC. Dễ thấy, $(ABF) = (ADE) = \frac{1}{4}(ABCD)$. Hơn nữa, $(KEA) = (KAF) = (KBE) = (KFD)$, vì E, F là các điểm chính giữa của cạnh AB, AD tương ứng và do tính đối xứng của hình vuông.



Do vậy, diện tích mỗi phần tô đậm bằng $\frac{1}{12}$ diện tích hình vuông. Thế nên, diện tích bốn miếng tô đậm bằng $\frac{1}{3}$ diện tích hình vuông. Đáp số: 40.

Nội dung	**Điểm**
Có lời giải đúng, đáp số đúng	5

4. Vì chữ I dùng xếp chữ TIN nên chữ I không thuộc cùng đồng xu với chữ T. Vì chữ I dùng xếp chữ HOI nên chữ I không thuộc cùng đồng xu với chữ O. Vì chữ I dùng xếp chữ TAI nên chữ I không cùng đồng xu với chữ A.

Do đó, chữ I nằm trên cùng đồng xu với chữ N.

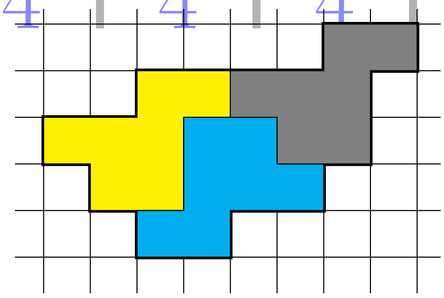
Nếu chữ H cùng đồng xu với chữ T thì A cùng đồng xu với N và G, nên không thể xếp được chữ NANG. Vô lý.

Vì có chữ HOI nên H không cùng đồng xu với O. Vậy, H cùng đồng xu với A. Do có chữ TIN nên G và T là một cặp, O và N là cặp còn lại. Vậy ta có các cặp (T, G), (O,N), (A,H), (N,I).

Tác giả: Ngô Hoàng Long

Nội dung	**Điểm**
Lập luận được chữ I nằm trên cùng đồng xu với chữ N	2
Lập luận được chữ H không cùng đồng xu với chữ T	2
Hoàn chỉnh phương án	1

5. Thí sinh cần chỉ ra một cách cắt theo lưới ô vuông sao cho ba hình sinh ra từ đó bằng nhau. Chẳn hạn, hình bên là một cách cắt.



6. Có thể. Ví dụ, đầu tiên 1 con kỳ nhông đỏ gặp 1 con kỳ nhông vàng và chúng đổi thành 2 con kỳ nhông xanh. Ta có 5 kỳ nhông đỏ, 5 kỳ nhông xanh, 10 kỳ nhông vàng. Tiếp theo, 5 con kỳ nhông đỏ gặp 5 con kỳ nhông xanh, chúng biến thành kỳ nhông vàng. Tức là ta sẽ được 20 kỳ nhông vàng.

$$(6, 3, 11) \to (5, 5, 10) \to (0, 0, 20).$$

Tác giả: Lê Vĩ

Nội dung	**Điểm**
Chỉ ra được một cách biến đổi về tình huống yêu cầu là được điểm tối đa	5

0.3 Lớp 6

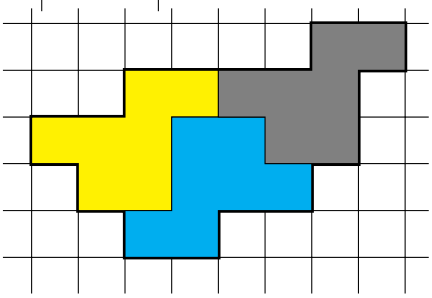
1. Có thể. Ví dụ, đầu tiên 1 con kỳ nhông đỏ gặp 1 con kỳ nhông vàng và chúng đổi thành 2 con kỳ nhông xanh. Ta có 5 kỳ nhông đỏ, 5 kỳ nhông xanh, 10 kỳ nhông vàng. Tiếp theo, 5 con kỳ nhông đỏ gặp 5 con kỳ nhông xanh, chúng biến thành kỳ nhông vàng. Tức là ta sẽ được 20 kỳ nhông vàng.

$$(6, 3, 11) \to (5, 5, 10) \to (0, 0, 20).$$

Tác giả: Lê Vĩ

Nội dung	**Điểm**
Chỉ ra được một cách biến đổi về tình huống yêu cầu là được điểm tối đa	5

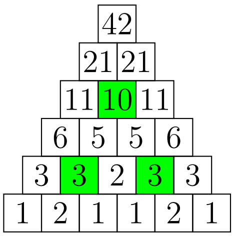
2. Thí sinh cần chỉ ra một cách cắt theo lưới ô vuông sao cho ba hình sinh ra từ đó bằng nhau. Chẳng hạn, hình bên là một cách cắt.



Tác giả: Phạm Văn Thuận

Nội dung	**Điểm**
Chỉ ra được một cách cắt đúng là được điểm tối đa	5

3. Có thể điền 7 số chẵn, chẳng hạn



Tác giả: Phạm Văn Thuận

Nội dung	**Điểm**
Chỉ ra được một cách điền có đúng 7 số chẵn là được điểm tối đa	5

4. Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương có hai chữ số mà tổng các chữ số của mỗi số đó chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 2?

Chứng minh. Nhận xét rằng đáp số sẽ bằng số số nguyên dương có hai chữ số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 3 trừ đi số số nguyên dương có hai chữ số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 6. Trước tiên ta đếm số số $\overline{ab}$ mà $a + b$ chia hết cho 3. Có thể xảy ra các trường hợp sau:

- Với $a \in \{3, 6, 9\}$ và $b \in \{0, 3, 6, 9\}$. Có $3 \times 4 = 12$ số $\overline{ab}$.
- Với $a \in \{1, 4, 7\}$, $b \in \{2, 5, 8\}$ hoặc hoán vị lại. Vậy có $2 \times 3 \times 3 \times = 18$ số $\overline{ab}$. Do đó, có $12 + 18 = 30$ số $\overline{ab}$ mà $a + b$ chia hết cho 3.

Tiếp theo ta đếm số số $\overline{ab}$ mà $a + b$ chia hết 6. Xét các trường hợp sau:

- Với $a = 6$ và $b \in \{0, 6\}$. Có 2 số $\overline{ab}$.
- Với $a = 5$ và $b \in \{1, 7\}$ hoặc hoán vị lại. Có 4 số $\overline{ab}$.
- Với $a = 4$ và $b \in \{2, 8\}$ hoặc hoán vị lại. Có 4 số $\overline{ab}$.
- Với $a \in \{3, 9\}$ và $b \in \{3, 9\}$. Có 4 số $\overline{ab}$.

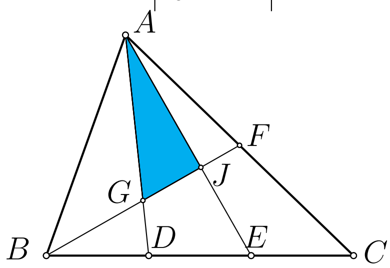
Do đó, có $2 + 4 + 4 + 4 = 14$ số $\overline{ab}$ mà $a + b$ chia hết cho 6. Vậy có $30 - 14 = 16$ số thỏa mãn đề bài. □

Nội dung	**Điểm**
Thí sinh xét các trường hợp nếu ra được đáp số 15 hoặc 17	1
Thí sinh xét các trường hợp nếu ra được đáp số 14 hoặc 18	1
Thí sinh xét các trường hợp nếu ra được đáp số 16	5

5. Tam giác ABC có các điểm D, E trên cạnh BC sao cho $BD = DE = EC$ và điểm F trên AC sao cho $AF = FC$. Biết rằng diện tích của ABC là 480 cm^2, tính diện tích của

   (a) tam giác BGD

   (b) tam giác AGJ.



Chứng minh. Dễ thấy, tam giác ABF và BCF có diện tích bằng nhau vì chung chiều cao từ đỉnh B lại có $AF = FC$. Do đó, khoảng cách vuông góc từ A, C đến BF bằng nhau. Do đó, $(ABG) = (BGC)$, và dẫn đến $(ABG) = 3(BGD)$. Suy ra $(ABG) = \frac{3}{4}(ABD) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}(ABC) = \frac{1}{4}(ABC)$. Từ đó, $(BAG) = 480/4 = 120$, thành ra $(BGD) = 120/3 = 40$.

Hơn nữa, $(ABJ) = (BJC)$, và $(BJC) = \frac{3}{2}(BJE)$. Suy ra $(ABJ) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}(ABC)$. Do đó,

$$(AGJ)/(ABC) = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}.$$

Vậy nên, đáp số cần tìm là $\frac{3}{20} \times 480 = 72$.

□

Tác giả: Phạm Văn Thuận

Nội dung	**Điểm**
Lập luận được về các liên hệ diện tích tam giác và tính được $(BGD) = 40$ thì cho 2 điểm	2
Chỉ tiếp ra được các liên hệ và tính được diện tích tam giác AGJ thì được 3 điểm	3

6. Có N em học sinh đứng thành vòng tròn, đánh số lần lượt là 1, 2, 3, ..., N theo chiều kim đồng hồ. Em số 1 đứng lại, em số 2 đi ra, em tiếp theo đứng lại, em tiếp theo nữa lại đi ra, cứ tiếp tục như thế, vòng tròn thưa dần cho đến khi chỉ còn lại một em.

   (a) Nếu $N = 32$ thì em cuối cùng còn lại là em số mấy?

   (b) Nếu $N = 2017$ thì em cuối cùng còn lại là em số mấy?

Chứng minh. a) Đáp số: 1.

b) Đáp số: 1987.

Sau khi bỏ 993 em

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots, 1986$$

thì còn lại 1024 em. Chú ý $1024 = 2^{10}$. Ta có thể xem như quá trình bắt đầu với vòng tròn mới gồm 1024 em, nên em còn lại ở vị trí bắt đầu. Em đứng đầu có số thứ tự (cũ) là 1987. Vậy em cuối cùng còn lại trong vòng tròn là 1987.

□

Tác giả: Hà Huy Khoái

Nội dung	**Điểm**
Tính được đáp số 1 với trường hợp $N = 32$	1
Tính được đáp số 1987 với trường hợp $N = 2017$	4

0.4 Lớp 7

1. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a, b, c, d) thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$ab = c + d, \quad \text{và} \quad a + b = cd.$$

Lời giải. Trừ hai phương trình ta được

$$ab - a - b = c + d - cd.$$

Sắp xếp lại cho ta

$$ab - a - b + cd - c - d = 0.$$

Cộng hai vế với 2 và đặt nhân tử chung ta được

$$(a-1)(b-1) + (c-1)(d-1) = 2.$$

Vì a, b, c, d là các số nguyên dương, nên chỉ có hai khả năng: cả hai tích đều bằng 1 hoặc một tích bằng 0, tích kia bằng 2.

TH 1. Nếu cả hai tích bằng 1 thì $a = b = c = d = 2$.

TH 2. Nếu $(a-1)(b-1) = 0$ và $(c-1)(d-1) = 2$. Khi đó $(c, d) = (2, 3)$ hoặc $(c, d) = (3, 2)$. Do $c + d = 5$ nên $(a, b) = (1, 5)$ hoặc $(5, 1)$. Vậy trong trường hợp này có 4 bộ (a, b, c, d) là $(1, 5, 2, 3), (1, 5, 3, 2), (5, 1, 2, 3), (5, 1, 3, 2)$.

TH3: Nếu $(a-1)(b-1) = 2$ và $(c-1)(d-1) = 0$. Tương tự ta cũng có 4 bộ (a, b, c, d) là $(2, 3, 1, 5), (2, 3, 5, 1), (3, 2, 1, 5), (3, 2, 5, 1)$

$$(a, b, c, d) = (2, 2, 2, 2), (1, 5, 2, 3).$$

Vậy có 9 bộ (a, b, c, d) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Tác giả: Aron Doman

Nội dung	**Điểm**
Chỉ ra được bộ số $(2, 2, 2, 2)$	1
Chỉ ra được bộ số $(1, 5, 2, 3)$	3
Chỉ ra được đủ bộ hoán vị bộ số $(1, 5, 2, 3)$	1

2. Cho năm số thực có tổng bằng 18, đồng thời tổng ba số tùy ý trong năm số đó không âm. Hỏi số NHỎ nhất có thể nhận giá trị bằng bao nhiêu?

Chứng minh. Giả sử năm số trong K là ℓ, b, c, d, e. Theo giả thiết ta có

$$\ell + b + c \geq 0, \ \ell + d + e \geq 0.$$

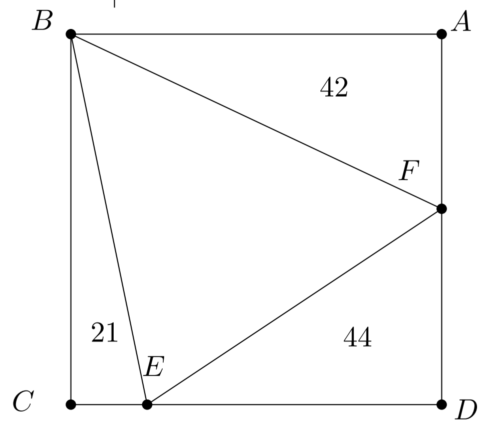
Suy ra $\ell + (\ell + b + c + d + e) \geq 0$. Do đó, $\ell \geq -18$. Đẳng thức đạt được với bộ $(-18, 9, 9, 9, 9)$.

□

Tác giả: Phạm Văn Thuận

Nội dung	Điểm
Chứng minh được giá trị nhỏ nhất là -18	4
Chỉ ra được trường hợp dấu bằng	1

3. Cho hình vuông $ABCD$. Hai điểm E, F lần lượt thuộc cạnh CD và DA sao cho diện tích các tam giác BCE, EDF và ABF lần lượt là 21 cm^2, 44 cm^2 và 42 cm^2. Tính diện tích tam giác BEF.



Chứng minh. Đặt $AB = AD = a$, và $FA = b$. Dễ thấy hai tam giác vuông BCE và ABF có hai đường cao bằng nhau nên tỉ số diện tích bằng tỉ số của hai đáy tương ứng. Từ đó suy ra $CF = FA/2 = b/2$.

Hơn nữa, $FD = a - b$ và $ED = a - b/2$. Ta có

$$ab = 84, \quad \text{và} \quad (a-b)(a-b/2) = 88.$$

Suy ra $2a^2 + b^2 - 3ab = 88 \times 2$. Biến đổi tương đương và dùng $ab = 84$ ta được

$$2a^2 + b^2 = 428,$$

hay là $a^4 - 214a^2 + 3528 = 0$. Phân tích bình phương cho ta

$$(a^2 - 107)^2 = 107^2 - 3528 = 7921 = 89^2.$$

Suy ra $a^2 = 89 + 107 = 196$, hay $a = 14$.

Suy ra, diện tích tam giác BEF bằng $196 - 44 - 42 - 21 = 89$.

□

Tác giả: Phạm Văn Thuận

Nội dung	Điểm
Lập được hệ phương trình cho a, b	2
Đưa được về phương trình trùng phương cho a	2
Tính được a và diện tích tam giác BEF	1

4. Có N em học sinh đứng thành vòng tròn, đánh số lần lượt là 1, 2, 3, ..., N theo chiều kim đồng hồ. Em số 1 đứng lại, em số 2 đi ra, em tiếp theo đứng lại, em tiếp theo nữa lại đi ra, cứ tiếp tục như thế, vòng tròn thưa dần cho đến khi chỉ còn lại một em.

Chứng minh. Sau khi bỏ 993 em

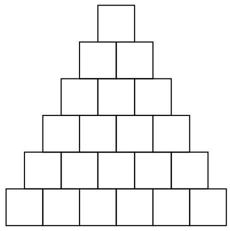
$$2, 4, 6, 8, \dots, 1986$$

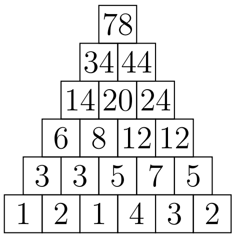
thì còn lại 1024 em. Chú ý $1024 = 2^{10}$. Ta có thể xem như quá trình bắt đầu với vòng tròn mới gồm 1024 em, nên em còn lại ở vị trí bắt đầu. Em đứng đầu có số thứ tự (cũ) là 1987. Vậy em cuối cùng còn lại trong vòng tròn là 1987.

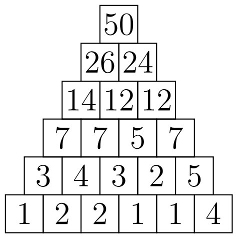
□

Tác giả: Hà Huy Khoái

5. Hình vẽ bên là một hình tháp gồm 21 ô vuông. Thầy Thuận muốn viết các số tự nhiên vào hình tháp sao cho, kể từ hàng thứ hai trở lên, một số ghi trong mỗi ô vuông bằng tổng hai số ghi trong hai ô vuông liền dưới nó. Ví dụ có thể điền các số tự nhiên theo mỗi một cách sau đây

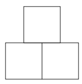




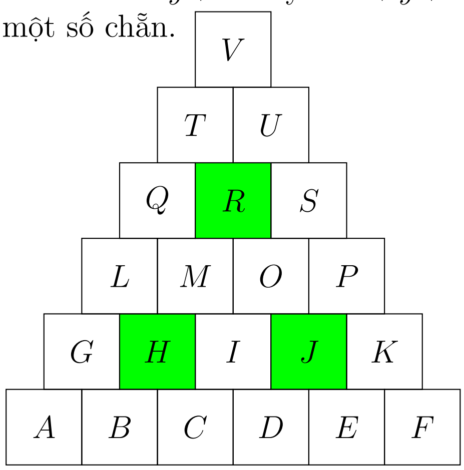


Hỏi thầy Thuận có thể viết được ít nhất là bao nhiêu số chẵn ở trong hình tháp? Tại sao?

Lời giải. Ta xét sáu hình tháp nhỏ rời nhau, trong hình tháp lớn, mỗi hình tháp nhỏ như hình bên.



Giả sử x, y, z là ba số ghi trong hình tháp nhỏ, sao cho $x = y + z$. Suy ra $x + y + z = 2(y + z)$, tức là trong ba số đó phải có ít nhất một số chẵn.



Theo đó, xét sáu hình tháp nhỏ rời nhau gồm có (A, B, G), (C, D, I), (E, F, K), (L, M, Q), (O, P, S) và (T, U, V). Hình tháp lớn được cấu thành từ sáu hình tháp nhỏ này và ba ô R, H, J. Vì mỗi hình tháp nhỏ chứa ít nhất một số chẵn nên hình tháp lớn chứa ít nhất 6 số chẵn. Hơn nữa,

$$R + H + J = 2(B + C + D + E + C + D),$$

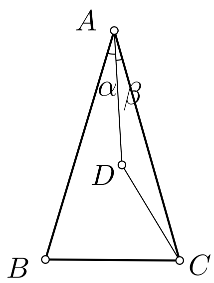
suy ra $R + H + J$ là số chẵn, tức là trong ba ô R, H, J phải có ít nhất một số chẵn nữa. Chứng tỏ hình tháp lớn chứa ít nhất 7 số chẵn. Bây giờ ta chỉ ra một cách điền.

□

Tác giả: Phạm Văn Thuận

Nội dung	Điểm
Lập luận được rằng trong ba ô của hình tháp con, có ít nhất một số chẵn	1
Vẽ được cấu hình gồm 6 tháp con và 3 ô dư	2
Lập luận được tổng ba số trong ba ô ở vị trí R, H, J là chẵn hoặc cách lý giải tương đương	2

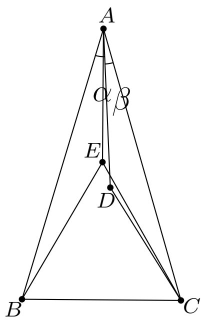
6. Tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D trong tam giác sao cho $AD = BC$ và $\angle DAB = \alpha, \angle DAC = \beta$. Biết $\alpha + 3\beta = 60^\circ$. Tính $\angle DCA$ theo α và β.



Lời giải. Dựng tam giác đều BCE (A, E cùng phía so với BC). Do $\triangle AEB = \triangle AEC$ nên $\angle ABE = \angle ACE$. Từ đó ta có:

$$\alpha+\beta+2\angle ACE = \angle BAC+\angle ABE+\angle ACE = 180^\circ-\angle EBC-\angle ECB = 60^\circ = \alpha+3\beta$$

Suy ra $\angle ACE = \beta$. Do đó, $\triangle DCA = \triangle EAC$ (cgc), vì vậy nên $\angle DCA = \angle EAC = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{\alpha+\beta}{2}$



□

Tác giả: Trần Quang Hùng

Nội dung	Điểm
Cách làm như trên cho điểm tối đa	5
Cách làm khác, kết quả đúng cũng cho điểm tối đa	5

0.5 Lớp 8

1. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a, b, c, d) thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$ab = c + d, \quad \text{và} \quad a + b = cd.$$

Lời giải. Trừ hai phương trình ta được

$$ab - a - b = c + d - cd.$$

Sắp xếp lại cho ta

$$ab - a - b + cd - c - d = 0.$$

Cộng hai vế với 2 và đặt nhân tử chung ta được

$$(a-1)(b-1) + (c-1)(d-1) = 2.$$

Vì a, b, c, d là các số nguyên dương, nên chỉ có hai khả năng: cả hai tích đều bằng 1 hoặc một tích bằng 0, tích kia bằng 2.

TH 1. Nếu cả hai tích bằng 1 thì $a = b = c = d = 2$.

TH 2. Nếu $(a-1)(b-1) = 0$ và $(c-1)(d-1) = 2$. Khi đó $(c, d) = (2, 3)$ hoặc $(c, d) = (3, 2)$. Do $c + d = 5$ nên $(a, b) = (1, 5)$ hoặc $(5, 1)$. Vậy trong trường hợp này có 4 bộ (a, b, c, d) là $(1, 5, 2, 3), (1, 5, 3, 2), (5, 1, 2, 3), (5, 1, 3, 2)$.

TH3: Nếu $(a-1)(b-1) = 2$ và $(c-1)(d-1) = 0$. Tương tự ta cũng có 4 bộ (a, b, c, d) là $(2, 3, 1, 5), (2, 3, 5, 1), (3, 2, 1, 5), (3, 2, 5, 1)$

$$(a, b, c, d) = (2, 2, 2, 2), (1, 5, 2, 3).$$

Vậy có 9 bộ (a, b, c, d) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Tác giả: Aron Doman

Nội dung	**Điểm**
Chỉ ra được bộ số $(2, 2, 2, 2)$	1
Chỉ ra được bộ số $(1, 5, 2, 3)$	3
Chỉ ra được đủ bộ hoán vị bộ số $(1, 5, 2, 3)$	1

2. Cho năm số thực có tổng bằng 172, đồng thời tổng hai số tùy ý trong năm số luôn không âm. Hỏi số nhỏ nhất trong năm số có thể nhận giá trị bằng bao nhiêu?

Chứng minh. Dễ thấy rằng không thể có hai số cùng âm trong K. Gọi a là số âm trong K. Suy ra $a + b \geq 0$, $a + c \geq 0$, $a + d \geq 0$. Đặt $a + b = m, c + a = n, d + a = p$. Hiển nhiên, $m, n, p \geq 0$. Do đó,

$$a + b + c + d = m + n + p - 2a = 172.$$

Suy ra $a \geq -172/2 = -86$.

Đẳng thức đạt được với bộ $(-86, 86, 86, 86)$.

□

| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |

Tác giả: Phạm Văn Thuận

Nội dung	**Điểm**
Chứng minh được giá trị nhỏ nhất bằng -86	4
Chỉ ra được dấu đẳng thức	1

3. Với một đa thức $q(x)$ nào đó, ta có

$$x^5 = (x^3 - x^2 - x + 1)q(x) + ax^2 + bx + c.$$

Tính giá trị của b.

Chứng minh. Chú ý rằng ta có thể phân tích

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2.$$

Từ đó, thay $x = 1$ và $x = -1$ và đẳng thức

$$x^5 = (x^3 - x^2 - x + 1)q(x) + ax^2 + bx + c$$

thì thu được

$$1 = a + b + c, \quad \text{và} \quad -1 = a - b + c$$

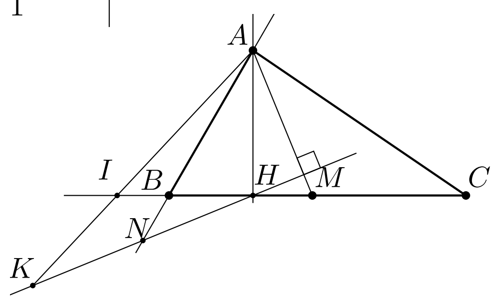
Giải hệ phương trình này ch ta $b = 1$. Đáp số: 1.

□

Tác giả: Michel Battaile

Nội dung	**Điểm**
Phân tích được đa thức $x^3 - x^2 - x + 1$ thành nhân tử	2
Lập được hệ phương trình với a, b, c	2
Tính được giá trị b	1

4. Cho tam giác ABC vuông, cạnh huyền BC và đường cao AH. Trên HC lấy điểm M sao cho $MC = 2MH$. Đường thẳng ℓ đi qua H vuông góc với AM và cắt AB (kéo dài) tại N. Trên tia đối của NH lấy K sao cho $NH = NK$. Gọi I là giao điểm của BC và AK. Tính tỉ số IK/AK.



Chứng minh. Ta sẽ chứng minh I là trung điểm của AK.

Do HN vuông góc với AM nên $\angle ANH + \angle NAM = 90°$, mà $\angle NAM + \angle CAM = 90°$ nên $\angle ANH = \angle CAM$. Lại có, $\angle BAH = 90° - \angle HAC = \angle MCA$, dẫn đến $\triangle NHA$ đồng dạng với $\triangle AMC$ (góc-góc). Từ đó,

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AH}{MC}.$$

Vì tam giác HAB đồng dạng với tam giác HCA nên

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{HC}.$$

Ta thu được

$$\frac{AB}{AN} = \frac{MC}{HC} = \frac{2}{3}.$$

Kết hợp với N là trung điểm HK ta suy ra B là trọng tâm tam giác AHK, vì thế BH đi qua trung điểm của AK, hay I là trung điểm của AK. Do đó, tỉ số cần tìm là $\frac{1}{2}$.

□

Nội dung	Điểm
Chứng minh được tam giác NHA bằng tam giác AMC	2
Chỉ ra được $AB/AN = \frac{2}{3}$	2
Chỉ ra được được I là trung điểm AK	1

5. Có 7 em học sinh thi đấu bóng bàn. Trong ngày thứ nhất, mỗi em có thể chưa đấu trận nào hoặc đã thi đấu một hoặc nhiều hơn một trận. Biết rằng trong hôm đó, mỗi em thắng không quá 1 trận. Chứng minh rằng

   (a) trong 4 em tùy ý có ít nhất hai em chưa đấu với nhau.

   (b) hết ngày thi đấu thứ nhất, để chuẩn bị cho ngày tiếp theo ta luôn có thể xếp 7 em thành ba nhóm sao cho các em thuộc cùng mỗi nhóm thì chưa đấu với nhau trận nào.

Chứng minh. (a) Giả sử tồn tại 4 em sao cho hai em bất kì trong 4 em đó đã thi đấu với nhau. Khi đó 4 em này đã thi đấu với nhau ít nhất 6 trận, nên phải có 1 em thắng ít nhất hai trận. Điều này trái với giả thiết.

(b) Ta chỉ ra rằng có không quá 4 em thi đấu nhiều hơn 2 trận. Thật vậy, giả sử ngược lại, có 5 em thi đấu, mỗi em thi đấu ít nhất ba trận. Suy ra tổng số trận đã đấu ít nhất là 8. Vô lý.

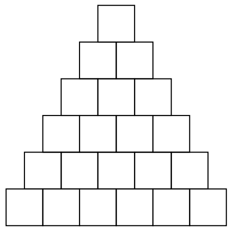
Xét 4 em đã thi đấu nhiều trận nhất. Theo câu a) trong 4 em đó phải tồn tại hai em chưa đấu với nhau. Xếp hai em đó vào nhóm 1, hai em còn lại lần lượt xếp vào nhóm 2 và nhóm 3. Ba em chưa được xếp nhóm chỉ thi đấu nhiều nhất là hai trận hôm đó. Do đó, ta có thể lần lượt xếp từng em vào nhóm mà em đó chưa đấu với ai trong đó.

□

Tác giả: Lê Phúc LỮ

Nội dung	Điểm
Ý thứ nhất	1
Ý thứ hai	4

6. Hình vẽ bên là một hình tháp gồm 21 ô vuông. Thầy Thuận muốn viết các số tự nhiên vào hình tháp sao cho, kể từ hàng thứ hai trở lên, một số ghi trong mỗi ô vuông bằng tổng hai số ghi trong hai ô vuông liền dưới nó. Ví dụ có thể điền các số tự nhiên theo mỗi một cách sau đây

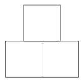


78
34 44
14 20 24
6 8 12 12
3 3 5 7 5
1 2 1 4 3 2

50
26 24
14 12 12
7 7 5 7
3 4 3 2 5
1 2 2 1 1 4

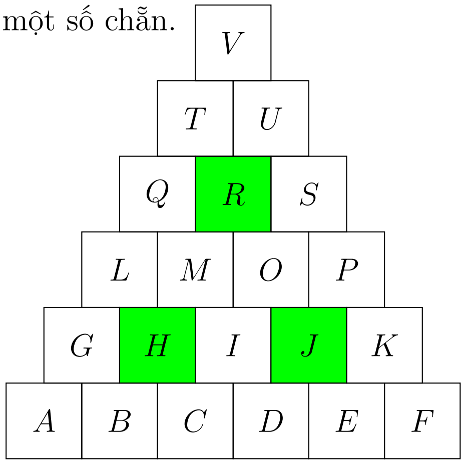
Hỏi thầy Thuận có thể viết được ít nhất là bao nhiêu số chẵn ở trong hình tháp? Tại sao?

Lời giải. Ta xét sáu hình tháp nhỏ rời nhau, trong hình tháp lớn, mỗi hình tháp nhỏ như hình bên.



Giả sử x, y, z là ba số ghi trong hình tháp nhỏ, sao cho $x = y + z$. Suy ra $x + y + z = 2(y + z)$, tức là trong ba số đó phải có ít nhất một số chẵn.

Theo đó, xét sáu hình tháp nhỏ rời nhau gồm có (A, B, G), (C, D, I), (E, F, K), (L, M, Q), (O, P, S) và (T, U, V). Hình tháp lớn được cấu thành từ sáu hình tháp nhỏ này và ba ô R, H, J. Vì mỗi hình tháp nhỏ chứa ít nhất một số chẵn nên hình tháp lớn chứa ít nhất 6 số chẵn. Hơn nữa,



$$R + H + J = 2(B + C + D + E + C + D),$$

suy ra $R + H + J$ là số chẵn, tức là trong ba ô R, H, J phải có ít nhất một số chẵn nữa. Chứng tỏ hình tháp lớn chứa ít nhất 7 số chẵn. Bây giờ ta chỉ ra một cách điền.

0
1 1
1 0 1
0 1 1 0
1 1 0 1 1
1 0 1 1 0 1

□

Tác giả: Phạm Văn Thuận

Nội dung	**Điểm**
Lập luận được rằng trong ba ô của hình tháp con, có ít nhất một số chẵn	1
Vẽ được cấu hình gồm 6 tháp con và 3 ô dư	2
Lập luận được tổng ba số trong ba ô ở vị trí R, H, J là chẵn hoặc cách lý giải tương đương	2

0.6 Lớp 9

1. Cho năm số thực có tổng bằng 172, đồng thời tổng hai số tùy ý trong năm số luôn không âm. Hỏi số nhỏ nhất trong năm số có thể nhận giá trị bằng bao nhiêu?

   Chứng minh. Dễ thấy rằng không thể có hai số cùng âm trong K. Gọi a là số âm trong K. Suy ra $a+b \geq 0$, $a+c \geq 0$, $a+d \geq 0$. Đặt $a+b=m, c+a=n, d+a=p$. Hiển nhiên, $m,n,p \geq 0$. Do đó,

   $$a+b+c+d = m+n+p-2a = 172.$$

   Suy ra $a \geq -172/2 = -86$.

   Đẳng thức đạt được với bộ $(-86, 86, 86, 86)$.

   □

   Tác giả: Phạm Văn Thuận

Nội dung	**Điểm**
Chứng minh được giá trị nhỏ nhất -86	4
Chỉ ra được dấu đẳng thức đạt được	1

2. Cho $f(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 - x^2 - x - 1$ và $g(x) = x^3 - x^2 - 5x - 1$. Giả sử phương trình $g(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt là a, b, c, tìm giá trị của

   $$f(a) + f(b) + f(c).$$

   Chứng minh. Chú ý rằng

   $$x^5 - x^4 - 5x^3 - x^2 - x - 1 = x^2(x^3 - x^2 - 5x - 1) - x - 1.$$

   Thành ra,

   $$\begin{cases} f(a) &= -a-1, \\ f(b) &= -b-1, \\ f(c) &= -c-1. \end{cases} \tag{1}$$

   Cộng ba đẳng thức cho ta

   $$f(a) + f(b) + f(c) = -a-b-c-3.$$

   Vì a, b, c là nghiệm của $g(x)$ nên ta có

   $$(x-a)(x-b)(x-c) = g(x).$$

   Dẫn đến

   $$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = x^3 - x^2 - 5x - 1.$$

   Từ đây ta có đồng nhất thức

   $$\begin{cases} a+b+c &= 1, \\ ab+bc+ca &= -5, \\ abc &= 1. \end{cases} \tag{2}$$

   Suy ra $f(a) + f(b) + f(c) = -1 - 3 = -4$. □

Nội dung	Điểm
Thực hiện được phép chia đa thức hoặc phân tích thành nhân tử	2
Chỉ ra được $f(a)+f(b)+f(c) = -a-b-c-3$	1
Dùng đồng nhất thức để tính được $a+b+c = -1$	2

3. Tìm cặp số (p, n) trong đó p là số nguyên tố, n là số nguyên dương sao cho $p^n + 144$ là một số chính phương.

Chứng minh. Từ bài ra ta có:

$$p^n = (m+12)(m-12),$$

suy ra

$$m+12 = p^a, m-12 = p^b,$$

với các số nguyên không âm a, b nào đó, $a > b, a+b = n$. Từ đó ta có

$$24 = p^b(p^{a-b} - 1). \tag{1}$$

Như vậy, hoặc $b = 0$, hoặc số nguyên tố p là ước của 24, nên p chỉ có thể nhận giá trị 2 hoặc 3.

Khi $b = 0$, ta có $m = 13, p = 5, n = 2$.

Khi $p = 2$, thì $24 = 2^b(2^{a-b} - 1)$ nên $b = 3$, $a = 2$ và $n = 8$.

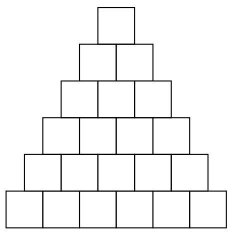
Khi $p = 3$, từ (1) suy ra $b = 1$. Ta có $8 = 3^{a-1} - 1$, suy ra $a = 3$, tức là $m = 15, n = 4$.

Vậy, tất cả các bộ ba (m, n, p) thoả mãn bài ra là: (13, 2, 5), (20, 8, 2) và (15, 4, 3). □

Tác giả: Hà Huy Khoái

Nội dung	Điểm
Lập được hệ phương trình cho a, b	2
Tính được giá trị của $p = 2$	1
Tính được giá trị của $p = 3$	1
Tính được giá trị của $p = 5$	1

4. Hình vẽ bên là một hình tháp gồm 21 ô vuông. Thầy Thuận muốn viết các số tự nhiên vào hình tháp sao cho, kể từ hàng thứ hai trở lên, một số ghi trong mỗi ô vuông bằng tổng hai số ghi trong hai ô vuông liền dưới nó. Ví dụ có thể điền các số tự nhiên theo mỗi một cách sau đây

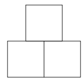


78					
34	44				
14	20	24			
6	8	12	12		
3	3	5	7	5	
1	2	1	4	3	2

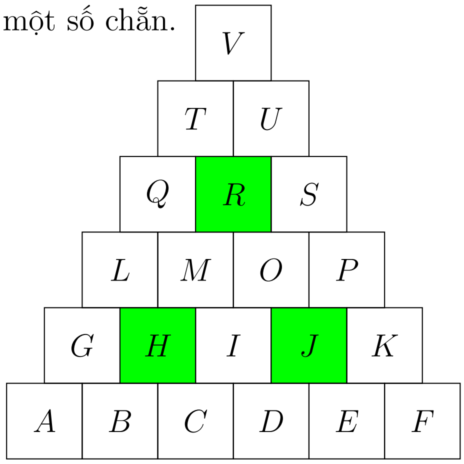
50					
26	24				
14	12	12			
7	7	5	7		
3	4	3	2	5	
1	2	2	1	1	4

Hỏi thầy Thuận có thể viết được ít nhất là bao nhiêu số chẵn ở trong hình tháp? Tại sao?

Lời giải. Ta xét sáu hình tháp nhỏ rời nhau, trong hình tháp lớn, mỗi hình tháp nhỏ như hình bên.



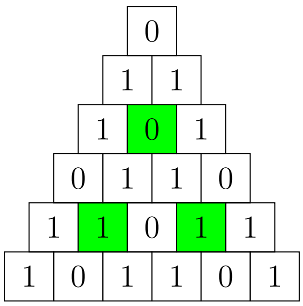
Giả sử x, y, z là ba số ghi trong hình tháp nhỏ, sao cho $x = y + z$. Suy ra $x + y + z = 2(y + z)$, tức là trong ba số đó phải có ít nhất một số chẵn.



Theo đó, xét sáu hình tháp nhỏ rời nhau gồm có (A, B, G), (C, D, I), (E, F, K), (L, M, Q), (O, P, S) và (T, U, V). Hình tháp lớn được cấu thành từ sáu hình tháp nhỏ này và ba ô R, H, J. Vì mỗi hình tháp nhỏ chứa ít nhất một số chẵn nên hình tháp lớn chứa ít nhất 6 số chẵn. Hơn nữa,

$$R + H + J = 2(B + C + D + E + C + D),$$

suy ra $R + H + J$ là số chẵn, tức là trong ba ô R, H, J phải có ít nhất một số chẵn nữa. Chứng tỏ hình tháp lớn chứa ít nhất 7 số chẵn. Bây giờ ta chỉ ra một cách điền.



□

Tác giả: Phạm Văn Thuận

Nội dung	**Điểm**
Lập luận được rằng trong ba ô của hình tháp con, có ít nhất một số chẵn	1
Vẽ được cấu hình gồm 6 tháp con và 3 ô dư	2
Lập luận được tổng ba số trong ba ô ở vị trí R, H, J là chẵn hoặc cách lý giải tương đương	2

5. Có 100 vận động viên tham gia một giải thi đấu bóng bàn, theo thể thức loại trực tiếp, nghĩa là vận động viên thua sẽ bị loại ngay. Theo thể lệ cuộc thi, hai vận động viên chỉ có thể được thi đấu với nhau nếu chênh lệch giữa số trận đã thi đấu của họ không quá 1. Biết rằng giải đấu này không có trận hòa và cuối cùng, chỉ còn lại đúng một người vô địch, tất cả vận động viên khác đều đã bị loại. Hỏi nhà vô địch có nhiều hơn 9 trận thắng được không? Tại sao?

Chứng minh. Gọi a_k là số người ít nhất tham gia thi đấu theo thể thức trên để người còn lại cuối cùng thắng đúng k trận.

Nhận xét 1: a_k là dãy tăng theo k.

Nhận xét 2: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$.

Nhận xét 3: Khi $k = 3$, trước trận thứ 3, người cuối cùng đã thắng 2 trận và phải đấu với người có ít nhất 1 trận thắng. Kết hợp với nhận xét 1 suy ra $a_3 \geq a_2 + a_1 = 5$.

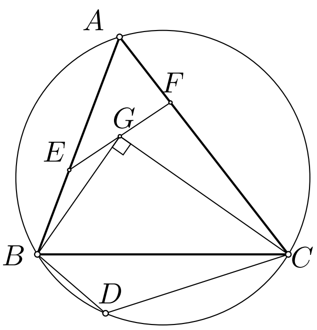
Lập luận tương tự ta có $a_4 \geq a_3 + a_2 \geq 5 + 3 = 8$; $a_5 \geq a_4 + a_3 \geq 8 + 5 = 13$; $a_9 \geq 89$; $a_{10} \geq 144$.

Do đó để có người thắng 10 trận thì phải có ít nhất 144 người tham gia thi đấu. Vì vậy thi sinh cuối cùng không thể thắng 10 trận được.

□

Tác giả: Lê Phúc Lữ

6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn γ, như hình vẽ. Điểm D nằm trên cung BC không chứa A của γ. Gọi E, F lần lượt là hai điểm trên cạnh AB, AC sao cho $BD = BE$ và $CD = CF$. Gọi G là trung điểm của EF. Chứng minh rằng BG vuông góc với GC.



Lời giải. Gọi J là điểm đối xứng D qua BC khi đó $BE = BJ = BD$ và $CF = CJ = CD$. Vậy

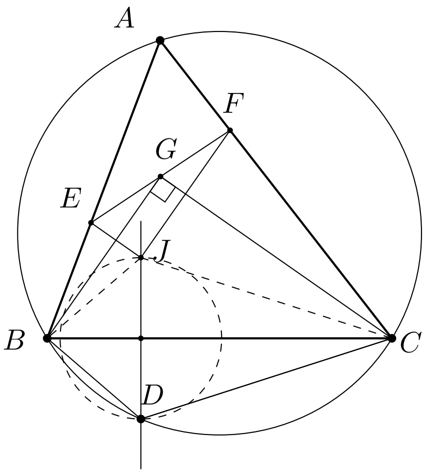
$$\angle EJF = 360^\circ - \angle FJC - \angle CJB - \angle EJB.$$

Lại chú ý rằng, $\angle BJC = \angle BDC$ và $\angle BEJ = \angle BJE$, $\angle JFC = \angle CJF$ nên

$$\angle EJF = 360^\circ - \angle BDC - (\angle BEJ + \angle CFJ) = 180^\circ + \angle A - (\angle A + \angle EJF).$$

Suy ra $\angle EJF = 90^\circ$. Nên trong tam giác vuông EJF, G là trung điểm của cạnh huyền EF nên $GF = GE = GJ$. Kết hợp với việc $BE = BJ$ và $CF = CJ$ nên suy ra GB, GC lần lượt là đường trung trực của EJ và FJ. Mà JE vuông góc với JF nên GB vuông góc với GC.

□



Tác giả: Trần Quang Hùng

0.7 Lớp 10

1. Hai số thực x, y thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+x^2}.$$

Chứng minh. Quy đồng mẫu số cho ta

$$p(x,y) = \frac{x + x^3 + y + y^3}{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2} = \frac{2 - 3xy}{2 - 2xy + x^2y^2}.$$

Đặt $s = xy$. Dễ thấy, $s \in \mathbb{R}$. Gọi d là một số thuộc miền giá trị của

$$\frac{2-3s}{2-2s+s^2} = d.$$

Khi đó, phương trình bậc hai theo ẩn s sau đây phải có nghiệm

$$ds^2 - (2d-3)s + 2d - 2 = 0.$$

Nghĩa là biệt thức $\Delta = (2d-3)^2 - 4(2d-2)d$ phải không âm. Tức là

$$-4d^2 - 4d + 9 \geq 0,$$

hay là $10 - (2d-1)^2 \geq 0$. Suy ra

$$\frac{-\sqrt{10}-1}{2} \leq d \leq \frac{\sqrt{10}-1}{2}.$$

Vậy nên,

$$-\frac{\sqrt{10}+1}{2} \leq p(x,y) \leq \frac{\sqrt{10}-1}{2}.$$

□

Tác giả: Phạm Văn Thuận

2. Gọi $f(x)$ là một đa thức bậc 2016 sao cho

$$f(1) = 1, \quad f(2) = \frac{1}{2}, \quad f(3) = \frac{1}{3}, \quad \ldots, \quad f(2017) = \frac{1}{2017}.$$

Tính giá trị của $f(2018)$.

Chứng minh. Viết các giả thiết dưới dạng

$$xf(x) - 1 = 0,$$

trong đó $x = 1, 2, 3, \ldots, 2017$. Vì $xf(x) - 1$ là một đa thức bậc 2017, có 2017 nghiệm. Ta có thể phân tích thành nhân tử, với c là một hằng số

$$xf(x) - 1 = c(x-1)(x-2)\cdots(x-2017).$$

Thay $x = 0$, ta tính được $c = \frac{1}{2017!}$. Thay $x = 2018$, ta được

$$2018f(2018) - 1 = \frac{1}{2017!}(2017)(2016)\cdots 3 \times 2 \times 1 = 1.$$

Suy ra $f(2018) = \frac{2}{2018} = \frac{1}{1009}$. □

Tác giả: Michel Battaile

3. Tìm cặp số (p, n) trong đó p là số nguyên tố, n là số nguyên dương sao cho $p^n + 144$ là một số chính phương.

Chứng minh. Từ bài ra ta có:

$$p^n = (m + 12)(m - 12),$$

suy ra

$$m + 12 = p^a, m - 12 = p^b,$$

với các số nguyên không âm a, b nào đó, $a > b, a + b = n$. Từ đó ta có

$$24 = p^b(p^{a-b} - 1). \tag{1}$$

Như vậy, hoặc $b = 0$, hoặc số nguyên tố p là ước của 24, nên p chỉ có thể nhận giá trị 2 hoặc 3.

Khi $b = 0$, ta có $m = 13, p = 5, n = 2$.

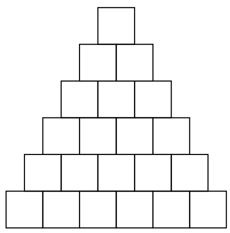
Khi $p = 2$, b có thể nhận những giá trị 1, 2 hoặc 3. Nếu $b = 1$ thì $12 = 2^{a-1} - 1$, vô lý. Nếu $b = 2$ thì $6 = 2^{a-2} - 1$, vô lý. Khi $b = 3$ ta có $3 = 2^{a-3} - 1$, suy ra $a = 5$, tức là $m = 20, n = 8$.

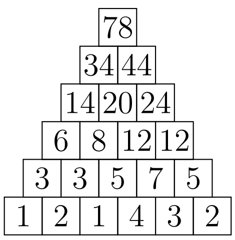
Khi $p = 3$, từ (1) suy ra $b = 1$. Ta có $8 = 3^{a-1} - 1$, suy ra $a = 3$, tức là $m = 15, n = 4$.

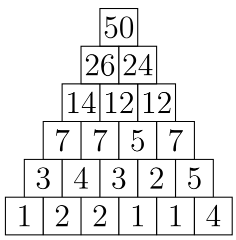
Vậy, tất cả các bộ ba (m, n, p) thoả mãn bài ra là: (13, 2, 5), (20, 8, 2) và (15, 4, 3). $\square$

Tác giả: Hà Huy Khoái

4. Hình vẽ bên là một hình tháp gồm 21 ô vuông. Thầy Thuận muốn viết các số tự nhiên vào hình tháp sao cho, kể từ hàng thứ hai trở lên, một số ghi trong mỗi ô vuông bằng tổng hai số ghi trong hai ô vuông liền dưới nó. Ví dụ có thể điền các số tự nhiên theo mỗi một cách sau đây

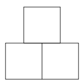






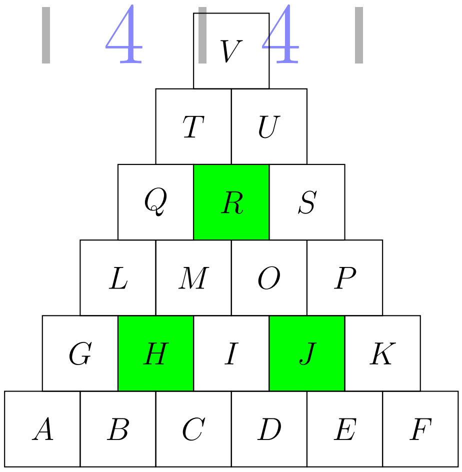
Hỏi thầy Thuận có thể viết được ít nhất là bao nhiêu số chẵn ở trong hình tháp? Tại sao?

Lời giải. Ta xét sáu hình tháp nhỏ rời nhau, trong hình tháp lớn, mỗi hình tháp nhỏ như hình bên.



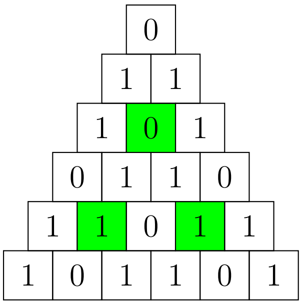
Giả sử x, y, z là ba số ghi trong hình tháp nhỏ, sao cho $x = y + z$. Suy ra $x + y + z = 2(y + z)$, tức là trong ba số đó phải có ít nhất một số chẵn.

Theo đó, xét sáu hình tháp nhỏ rời nhau gồm có (A, B, G), (C, D, I), (E, F, K), (L, M, Q), (O, P, S) và (T, U, V). Hình tháp lớn được cấu thành từ sáu hình tháp nhỏ này và ba ô R, H, J. Vì mỗi hình tháp nhỏ chứa ít nhất một số chẵn nên hình tháp lớn chứa ít nhất 6 số chẵn. Hơn nữa,



$$R + H + J = 2(B + C + D + E + C + D),$$

suy ra $R + H + J$ là số chẵn, tức là trong ba ô R, H, J phải có ít nhất một số chẵn nữa. Chứng tỏ hình tháp lớn chứa ít nhất 7 số chẵn. Bây giờ ta chỉ ra một cách điền.



□

Tác giả: Phạm Văn Thuận

5. Có 100 vận động viên tham gia một giải thi đấu bóng bàn, theo thể thức loại trực tiếp, nghĩa là vận động viên thua sẽ bị loại ngay. Theo thể lệ cuộc thi, hai vận động viên chỉ có thể được thi đấu với nhau nếu chênh lệch giữa số trận đã thi đấu của họ không quá 1. Biết rằng giải đấu này không có trận hòa và cuối cùng, chỉ còn lại đúng một người vô địch, tất cả vận động viên khác đều đã bị loại. Hỏi nhà vô địch có nhiều hơn 9 trận thắng được không? Tại sao?

   Chứng minh. Gọi a_k là số người ít nhất tham gia thi đấu theo thể thức trên để người còn lại cuối cùng thắng đúng k trận.

   Nhận xét 1: a_k là dãy tăng theo k.

   Nhận xét 2: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$.

   Nhận xét 3: Khi $k = 3$, trước trận thứ 3, người cuối cùng đã thắng 2 trận và phải đấu với người có ít nhất 1 trận thắng. Kết hợp với nhận xét 1 suy ra $a_3 \geq a_2 + a_1 = 5$.

   Lập luận tương tự ta có $a_4 \geq a_3 + a_2 \geq 5 + 3 = 8$; $a_5 \geq a_4 + a_3 \geq 8 + 5 = 13$; $a_9 \geq 89$; $a_{10} \geq 144$.

   Do đó để có người thắng 10 trận thì phải có ít nhất 144 người tham gia thi đấu. Vì vậy thi sinh cuối cùng không thể thắng 10 trận được.

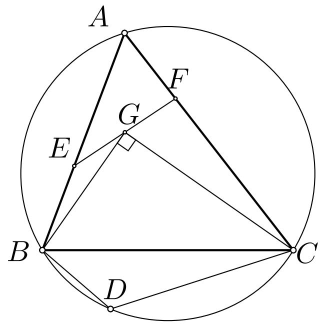
   □

Tác giả: Lê Phúc Lữ

| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |

Nội dung	**Điểm**
Thực hiện được phép chia đa thức hoặc phân tích thành nhân tử	2
Chỉ ra được $f(a)+f(b)+f(c) = -a-b-c-3$	1
Dùng đồng nhất thức để tính được $a+b+c = -1$	2

6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn γ, như hình vẽ. Điểm D nằm trên cung BC không chứa A của γ. Gọi E, F lần lượt là hai điểm trên cạnh AB, AC sao cho $BD = BE$ và $CD = CF$. Gọi G là trung điểm của EF. Chứng minh rằng BG vuông góc với GC.



Lời giải. Gọi J là điểm đối xứng D qua BC khi đó $BE = BJ = BD$ và $CF = CJ = CD$. Vậy

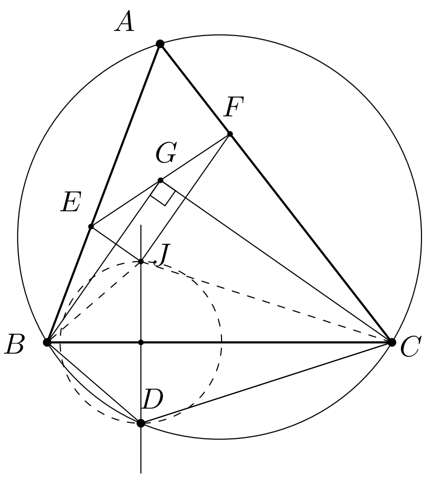
$$\angle EJF = 360^\circ - \angle FJC - \angle CJB - \angle EJB.$$

Lại chú ý rằng, $\angle BJC = \angle BDC$ và $\angle BEJ = \angle BJE$, $\angle JFC = \angle CJF$ nên

$$\angle EJF = 360^\circ - \angle BDC - (\angle BEJ + \angle CFJ) = 180^\circ + \angle A - (\angle A + \angle EJF).$$

Suy ra $\angle EJF = 90^\circ$. Nên trong tam giác vuông EJF, G là trung điểm của cạnh huyền EF nên $GF = GE = GJ$. Kết hợp với việc $BE = BJ$ và $CF = CJ$ nên suy ra GB, GC lần lượt là đường trung trực của EJ và FJ. Mà JE vuông góc với JF nên GB vuông góc với GC.

□



Tác giả: Trần Quang Hùng