Mathley 2 Number 1/January 2014

Mathley là nhóm giải toán trên mạng xuất bản bài toán và lời giải định kỳ, bài viết phù hợp với học sinh trung học có năng khiếu toán học và các bạn trẻ yêu toán học, tham gia các cuộc thi học sinh giỏi toán. Mỗi năm có sáu ấn bản điện tử được ra đời nhằm phục vụ phong trào giải toán. **Mathley** is an online problem solving corner with prolems, solutions, and materials freely accessible to junior up to high school students. The corner is is made public six times per year on a regular basis dedicated to the promotion of problem solving among junior and high school students.

Email: mathley@hus.edu.vn.
Website: www.hexagon.edu.vn/mathley.html

CÁC BÀI TOÁN/PROBLEMS

1. *Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội.* Cho các đoạn AD, BE, CF có trung điểm cùng nằm trên đường thẳng ℓ. Các điểm X, Y, Z lần lượt thuộc đường thẳng EF, FD, DE sao cho $AX \parallel BY \parallel CZ \parallel \ell$. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng.

2. *Đặng Hùng Thắng, trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội.* Cho dãy số (t_n) xác định truy hồi như sau $t_0 = 0$, $t_1 = 6$, $t_{n+2} = 14t_{n+1} - t_n$. Chứng minh rằng với mỗi số $n \geq 1$, thì t_n là diện tích của một tam giác có độ dài ba cạnh đều là các số nguyên.

3. *Nguyễn Tiến Lâm, trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội.* Cho đa giác đều có 2013 cạnh, hỏi có bao nhiêu tam giác không cân có các đỉnh là các đỉnh của đa giác đã cho và có một góc lớn hơn $120°$?

4. *Michel BATAILLE, 12, rue Sainte-Catherine, 76000 ROUEN (FRANCE)* Gọi S_k là tập tất cả các bộ ba số thực (a, b, c) thỏa mãn $a < k(b+c)$, $b < k(c+a)$, và $c < k(a+b)$. Hỏi với giá trị nào của k thì S_k là một tập con của $\{(a, b, c)|ab + bc + ca > 0\}$?

5. *Nguyễn Duy Thái Sơn, trường Đại học Đà Nẵng, Đà Nẵng.* Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, trong đó $u_1 = 1, u_2 = 2$, và $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + \frac{(-1)^n - 1}{2}$ với mọi số nguyên dương n. Chứng minh rằng mọi số nguyên dương đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của một số số hạng đôi một phân biệt của dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$.

6. *Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội.* Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB tại E, F. P di chuyển trên EF, PB cắt CA tại M, MI cắt đường thẳng qua C vuông góc AC tại N. Chứng minh rằng đường thẳng qua N vuông góc với PC luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.

7. *Nguyễn Văn Linh, trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội.* Hai đường tròn γ và δ cùng tiếp xúc trong với đường tròn ω tại A và B. Từ A kẻ tiếp tuyến ℓ_1, ℓ_2 tới δ, từ B kẻ hai tiếp tuyến t_1, t_2 tới γ. Biết rằng ℓ_1 cắt t_1 tại X, ℓ_2 cắt t_2 tại Y, hãy chứng minh rằng tứ giác $AXBY$ là tứ giác ngoại tiếp.

8. *Hà Duy Hưng, trường THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội, Xuân Thủy, Cầu Giấy, Hà Nội.* Với mỗi n nguyên dương ta kí hiệu

$$\frac{x_n}{y_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}}$$

ở đó x_n, y_n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng y_n không chia hết cho 2^n với mọi số nguyên dương n.

9. *Vũ Thế Khôi, Viện Toán học, Viện KHCN Việt Nam, Cầu Giấy, Hà Nội.* Có 2014 em học sinh đến từ những trường trung học phổ thông trên toàn quốc ngồi quanh một bàn tròn theo cách tùy ý. Sau đó ban tổ chức muốn xếp lại cho những học sinh cùng một trường ngồi liền nhau bằng cách thực hiện phép đổi chỗ như sau: hoán đổi vị trí của hai nhóm học sinh liền nhau (xem minh họa). Tìm số k nhỏ nhất sao cho có thể đạt được kết quả như mong muốn của ban tổ chức với không quá k phép đổi chỗ. Phép đổi chỗ như sau

$$\cdots \underbrace{ABCD}_{1}\underbrace{EFG}_{2} \cdots \longrightarrow \cdots \underbrace{EFG}_{2}\underbrace{ABCD}_{1} \cdots$$