Mathley 3

Number 3/August 2014

**Mathley** là nhóm giải toán trên mạng xuất bản bài toán và lời giải định kỳ, bài viết phù hợp với học sinh trung học có năng khiếu toán học và các bạn trẻ yêu toán học, tham gia các cuộc thi học sinh giỏi toán. Mỗi năm có sáu ấn bản điện tử được ra đời nhằm phục vụ phong trào giải toán. **Mathley** is an online problem solving corner with prolems, solutions, and materials freely accessible to junior up to high school students. The corner is is made public six times per year on a regular basis dedicated to the promotion of problem solving among junior and high school students.



# CÁC BÀI TOÁN/PROBLEMS

**1.** *Vũ Thế Khôi, Phòng Hình học Topo, Viện Toán học Việt Nam, Hoàng Quốc Việt, Hà Nội.* Chích chòe và chim sẻ mỗi con xuất phát từ một đỉnh bất kỳ của hình đa giác đều 103 cạnh và bay vòng quanh đa giác theo chiều kim đồng hồ đến đậu tại các đỉnh khác. Chích chòe mỗi lần bay vượt qua $\ell$ cạnh còn chim sẻ mỗi lần vượt qua $d$ cạnh với $\ell \neq d$ là các số nguyên dương bé hơn 103.

Giả sử trong cả đoạn đường bay chích chòe đã từng đậu tại $m$ đỉnh và chim sẻ đã từng đậu tại $n$ đỉnh với $m \geq n \geq 3$. Tìm $m$ và $n$ biết rằng chỉ có duy nhất một đỉnh chung mà cả chích chòe và chim sẻ đã từng đậu và cũng chỉ có duy nhất một đỉnh chưa từng có con nào đến đậu.

A copsychus and a sparrow, each initially located at one of the vertex of a regular polygon with 103 edges, fly clockwise to another vertex each. The copsychus moves across $\ell$ edges each time while the sparrow moves through $d$ edges of the polygon, where $\ell \neq d$ are both integers less than 103. Assume that, during their journeys, the copsychus has stopped at $m$ vertices while sparrow has stopped at $n$ vertices of the polygon, for $m \geq n \geq 3$. Determine the value of $m, n$ given that there is only one common single vertex of the polygon that both of birds have stopped at, and there is only one vertex that neither of the birds have reached.

**2.** *Lưu Bá Thắng, Khoa Toán, trường Đại học Sư phạm Hà Nội, Xuân Thủy, Cầu Giấy.* Cho số nguyên dương $n$ và số nguyên tố $p > n+1$. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên.

$$1 + \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{2n+1} + \cdots + \frac{x^p}{pn+1} = 0.$$

Let $n$ be a positive integer and $p$ a prime number $p > n+1$. Prove that the following equation does not have integer solution.

$$1 + \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{2n+1} + \cdots + \frac{x^p}{pn+1} = 0.$$

**3.** *Michel BATAILLE, 12, rue Sainte-Catherine, 76000 ROUEN (FRANCE).* Đường tròn nội tiếp $\gamma$ của tam giác $ABC$ tiếp xúc với cạnh $BA, BC$ tại $D, E$ tương ứng. Một tiếp tuyến $t$ với $\gamma$, khác với các cạnh, cắt đường thẳng $AB$ tại $M$. Nếu $CM, DE$ cắt nhau tại $K$, chứng minh rằng các đường thẳng $AK, BC$ và $t$ song song hoặc đồng quy.

Let the incircle $\gamma$ of triangle $ABC$ be tangent to $BA, BC$ at $D, E$, respectively. A tangent $t$ to $\gamma$, distinct from the sidelines, intersects the line $AB$ at $M$. If lines $CM$, $DE$ meet at $K$, prove that lines $AK, BC$ and $t$ are parallel or concurrent.

**4.** *Nguyễn Minh Hà, trường Đại học Sư phạm Hà Nội, Xuân Thủy, Cầu giấy, Hà Nội.* Cho tam giác nhọn $ABC$. Gọi $E, F$ theo thứ tự là điểm đối xứng của $B, C$ qua $AC, AB$; gọi $D$ là giao điểm của $BF, CE$. Biết rằng $K$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $DEF$. Chứng minh rằng $AK$ vuông góc với $BC$.

Let $ABC$ be an acute triangle with $E, F$ being the reflections of $B, C$ about the line $AC, AB$ respectively. Point $D$ is the intersection of $BF$ and $CE$. If $K$ is the circumcircle of triangle $DEF$, prove that $AK$ is perpendicular to $BC$.

**5.** *Trần Quang Hùng, trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Thanh Xuân, Hà Nội.* Cho tam giác $ABC$ với đường tròn nội tiếp $(I)$ và $P, Q$ là hai điểm bất kỳ. $QA, QB, QC$ cắt $BC, CA, AB$ lần lượt tại $D, E, F$. Tiếp tuyến tại $D$, khác $BC$, của đường tròn $(I)$ cắt $PA$ tại $X$. Các điểm $Y$ và $Z$ được xác định theo cách tương tự. Tiếp tuyến tại $X$, khác $XD$, của đường tròn $(I)$ cắt $BC$ tại $U$. Các điểm $V$ và $W$ được xác định tương tự. Chứng minh rằng ba đường thẳng $AU, BV, CW$ đồng quy.

Triangle $ABC$ has incircle $(I)$ and $P, Q$ are the two points in the plane of the triangle. Let $QA, QB, QC$ meet $BC, CA, AB$ respectively at $D, E, F$. The tangent at $D$, other than $BC$, of the circle $(I)$ meets $PA$ at $X$. The points $Y$ and $Z$ are defined in the same manner. The tangent at $X$, other than $XD$, of the circle $(I)$ meets $BC$ at $U$. The two points $V$ and $W$ are defined in the same way. Prove that three lines $AU, BV, CW$ are concurrent.

**6.** *Nguyễn Văn Linh, sinh viên trường Đại học Ngoại thương Hà Nội.* Cho tứ giác lưỡng tâm $ABCD$ có tâm đường tròn ngoại tiếp là $O$. Gọi $E, F$ lần lượt là giao điểm của $AB$ và $CD$, $AD$ và $BC$. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn tâm $O$ tiếp xúc với bốn đường tròn ngoại tiếp các tam giác $EAD, EBC, FAB, FCD$.

A quadrilateral is called bicentric if it has both an incircle and a circumcircle. $ABCD$ is a bicentric quadrilateral with $(O)$ being its circumcircle. Let $E, F$ be the intersections of $AB$ and $CD$; $AD$ and $BC$ respectively. Prove that there is a circle with center $O$ tangent to all of the circumcircles of the four triangles $EAD, EBC, FAB, FCD$.

**7.** *Titu Andreescu, Khoa Toán, trường Đại học Texas, Hoa Kỳ.* Tìm tất cả các số nguyên tố $p, q, r$ sao cho

$$\frac{p^{2q} + q^{2p}}{p^3 - pq + q^3} = r.$$

Find all primes $p, q, r$ such that $\frac{p^{2q}+q^{2p}}{p^3-pq+q^3} = r$.

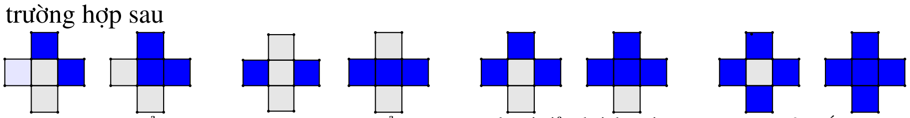
**8.** *Trần Minh Ngọc, sinh viên trường Đại học Sư phạm Tp Hồ Chí Minh.* Cho hai đường tròn $(U)$ và $(V)$ cắt nhau tại $A, B$. Một đường thẳng $d$ cắt $(U), (V)$ lần lượt tại $P, Q$ và $R, S$. Gọi $t_P, t_Q, t_R, t_S$ lần lượt là tiếp tuyến tại $P, Q, R, S$ của các đường tròn tương ứng. Gọi $(W)$ là một đường tròn bất kỳ đi qua $A, B$. Chứng minh rằng nếu đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi $t_P, t_R, AB$ tiếp xúc $(W)$ thì đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi $t_Q, t_S, AB$ cũng tiếp xúc $(W)$.

Two circles $(U)$ and $(V)$ intersect at $A, B$. A line $d$ meets $(U), (V)$ at $P, Q$ and $R, S$ respectively. Let $t_P, t_Q, t_R, t_S$ be the tangents at $P, Q, R, S$ of the two circles. Another circle $(W)$ passes through through $A, B$. Prove that if the circumcircle of triangle that is formed by the intersections of $t_P, t_R, AB$ is tangent to $(W)$ then the circumcircle of triangle formed by $t_Q, t_S, AB$ is also tangent to $(W)$.

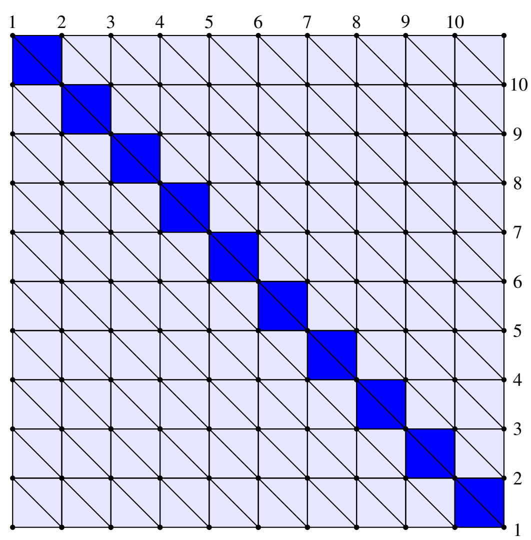
# LỜI GIẢI/SOLUTIONS

**1.** *Vũ Hà Văn, khoa Toán, Đại học Yale, Hoa Kỳ.* Vùng nọ có khu đất vàng $100 \times 100$ m, chia ra làm 100 lô, mỗi lô $10 \times 10$ m. Vua bãi rác muốn lấn chiếm khu đất này nên sai tay chân đổ rác vào một số ô. Nếu một ô nào chưa có rác mà có ít nhất hai ô cạnh nó (có chung cạnh) đã bị đổ rác thì (đáng tiếc) hôm sau nhân dân cũng sẽ đổ rác vào ô đó. Nếu đến một ngày nào đó tất cả các ô đều bị đổ rác thì vua bãi rác sẽ chiếm khu đất. Nếu vua bãi rác muốn chiếm khu đất này thì lúc đầu cần đổ rác vào ít nhất mấy ô?

**Lời giải.** (của bạn **Nguyễn Tuấn Hải Đăng**, lớp 12A1 chuyên Toán, trường THPT Chuyên KHTN). Ta đưa bài toán về mô hình bảng ô vuông kích thước $10 \times 10$ và mỗi ô bị đổ rác thì sẽ được tô đen. Mỗi bước biến đổi tương ứng với việc ta tô đen một ô chưa được tô và chung cạnh với ít nhất hai ô được tô đen. Do đó, ta chỉ cần tìm số ô đen được tô ban đầu sao cho sau một số hữu hạn bước biến đổi, ta có thể tô đen cả bảng. Gọi $p$ là chu vi của tất cả các phần được tô đen. Ta chứng minh rằng sau mỗi bước biến đổi thì $p$ không tăng. Thật vậy, do ở mỗi bước biến đổi ta tô đen một ô khi nó phải chung cạnh với ít nhất hai ô đen. Ta có các trường hợp sau




Khi cả bảng được tô đen thì $p' = 10 \times 4 = 40$. Do đó, để tô đen cả bảng ban đầu $p \geq p' = 40$. Mà mỗi ô có chu vi là 4. Suy ra ban đầu cần tô ít nhất $\frac{p}{4} = 10$ ô. Ta tô mười ô trên cùng một đường chéo chính thì sau hữu hạn bước biến đổi thì cả bảng sẽ được tô đen. Ban đầu vua cho đổ rác vào mười ô trên một đường chéo chính số 1. Ngày hôm sau các ô trên hai đường chéo chính số 2 sẽ bị đổ rác (do mỗi ô đều kề hai ô ở đường chéo số 1). Tiếp tục như vậy thì đến ngày thứ 10 cả khu đất sẽ bị đổ rác. Đáp số: 10 ô.



□

**2.** *Nguyễn Minh Hà, trường THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội, Xuân Thủy, Cầu Giấy.* Cho tam giác $ABC$ có đường tròn ngoại tiếp là $(K)$. Một đường tròn tiếp xúc với $AB, AC$ và tiếp xúc trong với $(K)$ tại $K_a$. Các điểm $K_b, K_c$ được định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng diện tích của tam giác $K_aK_bK_c$ không lớn hơn diện tích tam giác $ABC$.

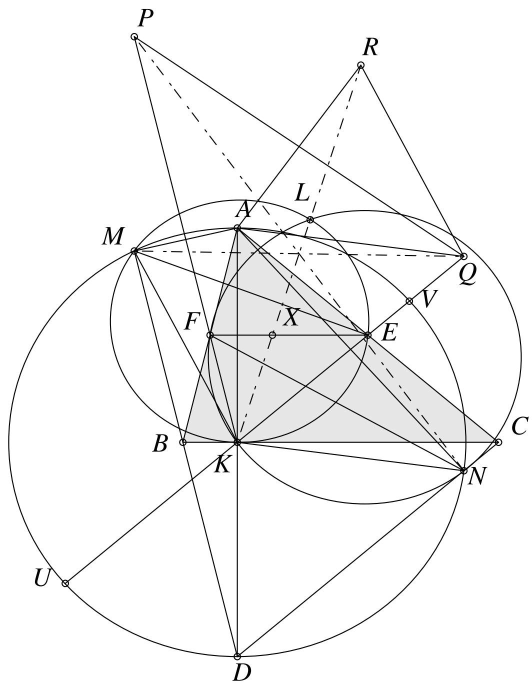
**Lời giải.** (của bạn **Nguyễn Tuấn Hải Đăng**, lớp 12A1 Toán, trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, Hà Nội) Để chứng minh bài toán này, ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau.
**Bổ đề 1.** Cho tam giác $ABC$, với $I$ là tâm đường tròn nội tiếp, và $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi $M, N, P$ lần lượt là điểm chính giữa các cung $BC$ không chứa $A$, cung $CA$ không chứa $B$, và cung $AB$ không chứa $C$. Giả sử $X, Y, Z$ lần lượt là điểm đối xứng của $M, N, P$ qua $O$. Các điểm $K_a, K_b, K_c$ được nghĩa như bài toán gốc. Ta có $X, I, K_a$ thẳng hàng, $Y, I, K_b$ thẳng hàng, và $Z, I, K_c$ thẳng hàng.

*Chứng minh.* Gọi $O_a$ là đường tròn tiếp xúc với $(O)$ tại $K_a$ và tiếp xúc với $AB, AC$ tại $U, V$. Do đó, $K_a$ là tâm vị tự ngoài của $(O_a)$ và $(O)$. Gọi $K_aU$ giao với $(O)$ tại $K_a$ và $P'$; $K_a$ và $V$ giao với $(O)$ tại $K_a$ và $N'$. Suy ra $O_aU \parallel OP'$, và $O_aV \parallel ON'$. Suy ra $OP'$ vuông góc với $AB$; $ON'$ vuông góc với $AC$. Tức là $P$ trùng $P'$ còn $N'$ trùng $N$. Áp dụng định lý Pascal cho sáu điểm $P, A, N$ và $B, K_a, C$ suy ra $U, I, V$ thẳng hàng. Suy ra tam giác $INV$ đồng dạng với tam giác $K_aPB$. Dẫn đến, $\angle UK_aB = \angle NIV = \angle UIB$. Suy ra tứ giác $UBK_aI$ nội tiếp. Do đó, $\angle PK_aI = \angle ABI = \angle ABN = \angle PK_aX$. Suy ra, ba điểm $X, I, K_a$ thẳng hàng. Hai phần sau tương tự. Bổ đề được chứng minh. □

Trở lại bài toán, ta cần chứng minh rằng diện tích tam giác $K_aK_bK_c$ không lớn hơn diện tích tam giác $ABC$. Điều này tương đương với
$$\frac{K_aK_b \cdot K_aK_c \cdot K_bK_c}{4R} \leq \frac{abc}{4R}.$$
Vì tam giác $IK_aK_c$ đồng dạng với tam giác $IZX$ (vì có ba cặp góc bằng nhau), suy ra $K_aK_c = \frac{XZ \cdot IK_a}{IZ}$. Tương tự ta có $IK_a = \frac{IA \cdot IM}{IX}$ từ tính đồng dạng của tam giác $IK_aM$ và $IAX$. Do đó,
$$K_aK_c = \frac{XZ \cdot IA \cdot IM}{IX \cdot IZ} = \frac{MP \cdot 2Rr}{IX \cdot IZ}.$$
Tương tự, ta cũng có $K_bK_c = \frac{2NP \cdot Rr}{IY \cdot IZ}$, $K_aK_b = \frac{2MN \cdot Rr}{IX \cdot IY}$. Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$abc \geq \frac{(2Rr)^3 MN \cdot NP \cdot MP}{(IX \cdot IY \cdot IZ)^2}.$$
Lưu ý rằng $NP = 2R\sin\frac{B+C}{2} = 2R\cos\frac{A}{2} = 2R\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, và hai đẳng thức tương tự cho $MN, MP$. Áp dụng công thức $S = \frac{abc}{4R} = pr$, suy ra $\frac{r}{R} = \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$. Công thức trung tuyến cho ta $IO^2 = \frac{2IX^2+2IM^2-XM^2}{4}$, suy ra
$$\begin{aligned} IX^2 &= 2IO^2 + \frac{XM^2}{2} - IM^2 \\ &= 2(R^2 - 2Rr) + 2R^2 - 4R^2\sin^2\frac{A}{2} \\ &= 4R\left(R\cos^2\frac{A}{2} - r\right) \\ &= 4R^2\left(\frac{p(p-a)}{bc} - \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\right) \end{aligned}$$
Biến đổi đại số cho ta $IX^2 = \frac{R^2(ab+ac+2(b-c)^2-a^2)}{abc}$.Tương tự ta thu được hai đẳng thức cho $IY^2$, và $IZ^2$. Dẫn đến, bây giờ ta cần chứng minh
$$64R^3pS \times 4^3(p-a)^3(p-b)^3(p-c)^3 \leq (abc)^3 t_at_bt_c,$$
trong đó $t_a = a(b+c) + 2(b-c)^2 - a^2$, $t_b = b(a+c) + 2(a-c)^2 - b^2$, và $t_c = c(a+b) + 2(a-b)^2 - c^2$. Lại có $abc = 4RS$ và $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ nên bất đẳng thức trên lại tương đương với
$$(a+c-b)^2(a+b-c)^2(b+c-a)^2 \leq t_at_bt_c.$$
Chú ý rằng $t_a \geq a(b+c-a)$, $t_b \geq b(c+a-b)$, $t_c \geq c(a+b-c)$ nên
$$t_at_bt_c \geq abc(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$
Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc, $abc \geq (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức đạt được khi tam giác $ABC$ đều. □

**3.** *Trần Quang Hùng, trường TPHT Chuyên Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN.* Cho tam giác $ABC$. Gọi $D$ là điểm đối xứng của $A$ qua $BC$. $(K)$ là đường tròn đường kính $AD$. $DB, DC$ lần lượt cắt $(K)$ tại $M, N$ khác $D$. $E, F$ lần lượt là trung điểm $CA, AB$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác $KEM, KFN$ cắt nhau tại $L$ khác $K$. $KL$ cắt $EF$ tại $X$. Các điểm $Y, Z$ được xác định tương tự. Chứng minh rằng $AX, BY, CZ$ đồng quy.

Chúng tôi xin giới thiệu lời giải của tác giả bài toán.



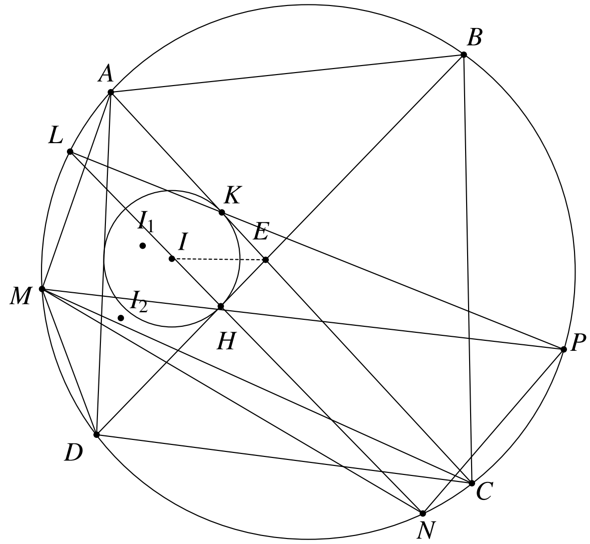

**Lời giải.** Gọi $P, Q$ đối xứng $K$ lần lượt qua $AM, AN$. Dễ thấy $\angle FAK = \angle FKA = \angle APK$ do đó $KF.KP = KA^2$. Tương tự $KE.KQ = KA^2$. Gọi $KE$ cắt $(K)$ tại $U, V$, dễ thấy $KU^2 = KV^2 = KE.KQ$ do đó $(UV, QE) = -1$ suy ra $\mathcal{P}_{Q/(K)} = QU.QV = QE.QK = \mathcal{P}_{Q/(KME)}$. Từ đó $QM$ là trục đẳng phương của $(K)$ và $(KME)$. Tương tự $PN$ là trục đẳng phương của $(K)$ và $(KNF)$. Mà $KL$ là trục đẳng phương của $(KME)$ và $(KNF)$ nên $KL, PN, QM$ đồng quy. Gọi $R$ đối xứng $A$ qua $PQ$. Từ tính chất hình bình hành đơn giản dễ thấy $KR, PN, QM$ đồng quy tại trung điểm mỗi đường do đó $KL$ đi qua $R$. Mặt khác dễ thấy $A$ là tâm ngoại tiếp tam giác $KPQ$ nên $KR$ đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác $KPQ$. Lại có $KE.KQ = KA^2 = KF.KP$ suy ra tứ giác $EFPQ$ nội tiếp, nên $KL$ đi qua điểm đẳng giác của tâm đường tròn Euler là điểm Kosnita của tam giác $KEF$. Theo tính đối xứng suy ra $AX$ cũng đi qua điểm Kosnita của tam giác $AEF$ hay cũng đi qua điểm Kosnita của tam giác $ABC$. Tương tự $BY, CZ$ cũng đi qua điểm Kosnita của tam giác $ABC$. □

**Nhận xét.** Bạn **Nguyễn Tuấn Hải Đăng**, lớp 12A1 Toán, trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên có lời giải sử dụng phép nghịch đảo cũng tương tự đáp án.

**4.** *Nguyễn Văn Linh, sinh viên trường Đại học Ngoại Thương, Hà Nội.* Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$. $L$ là điểm bất kì trên cung $BC$ không chứa $A$. Chứng minh rằng đường tròn $A$-mixtilinear nội tiếp của tam giác $ABC$, các đường tròn $L$-mixtilinear nội tiếp của các tam giác $LAB, LAC$ có chung một tiếp tuyến.

*Cách 1 (Luis González).* Trước tiên ta phát biểu một bổ đề.

**Bổ đề 1.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)$. $AC$ giao $BD$ tại $E$. Gọi $(I)$ là đường tròn tiếp xúc với tia $EA, ED$ và tiếp xúc trong với $(O)$ tại $L$. $M$ là điểm bất kì trên cung $AD$ không chứa $B, C$. Gọi $I_1, I_2$ là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác $MAC, MBD$. Chứng minh rằng $I_1, I_2, M, L$ cùng thuộc một đường tròn.



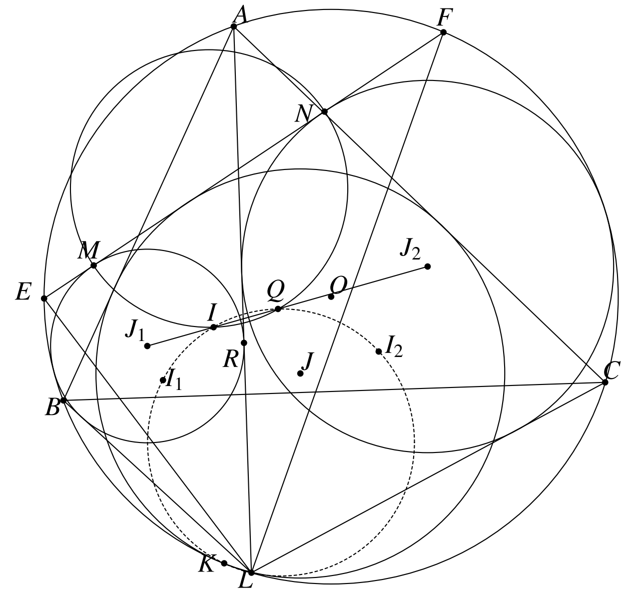

**Chứng minh.** Gọi $K, H$ lần lượt là tiếp điểm của $(I)$ với $AC, BD$. $KL, HL$ giao $(O)$ lần thứ hai tại $P, N$ thì $P, N$ là điểm chính giữa các cung $AC, BD$. Do đó $\overline{M, I_1, P}$ và $\overline{M, I_2, N}$. Bằng phép cộng góc đơn giản suy ra $PN$ vuông góc với phân giác $\angle AED$ hay $PN \parallel KH$.. Từ đó $\frac{PK}{PL} = \frac{NH}{NL}$ hay $\frac{PK.PL}{PL^2} = \frac{NH.NL}{NL^2}$. Suy ra $\frac{PA^2}{PL^2} = \frac{ND^2}{NL^2}$ hay $\frac{PI_1}{PL} = \frac{NI_2}{NL}$. Ta thu được $\triangle LPI_1 \sim \triangle LNI_2$ (theo trường hợp cạnh góc cạnh), do đó $\angle LI_1P = \angle LI_2N$, tức là bốn điểm $L, I_1, I_2, M$ cùng thuộc một đường tròn. □

*Trở lại bài toán.*

Gọi $(J), (J_1), (J_2)$ lần lượt là các đường tròn $A$-mixtilinear nội tiếp của tam giác $ABC$, các đường tròn $L$-mixtilinear nội tiếp của các tam giác $LAB, LAC$; $l$ là tiếp tuyến chung của $(J_1)$ và $(J_2)$, cắt $(O)$ tại $E$ và $F$. Gọi $I, I_1, I_2$ lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác $LEF, LAB, LAC$. Gọi $M, N$ là tiếp điểm của $(J_1), (J_2)$ với $l$, $R$ là tiếp điểm của $(J_1)$ với $AL$.

Theo định lý Sawayama-Thebault, $I$ nằm trên $J_1J_2$ và $MR$, $I_1R \perp J_1L$. Dễ thấy $\angle MIN = 90°$. Gọi $Q$ là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính $MN$ với $J_1J_2$. Do $J_1M$ là tiếp tuyến của $(MN)$ nên $J_1I_1.J_1L = J_1R^2 = J_1M^2 = J_1Q.J_1I$. Suy ra $I_1$ nằm trên $(QIL)$.Tương tự, $I_2$ cũng nằm trên $(QIL)$. Tức là $I, I_1, I_2, L$ cùng thuộc một đường tròn. Gọi $K$ là tiếp điểm của $(J)$ với $(O)$. Áp dụng bổ đề trên cho tứ giác $AABC$ suy ra $I_1, I_2, L, K$ cùng thuộc một đường tròn.

Do đó lại áp dụng bổ đề trên cho tứ giác $AFCE$ ta có $(LII_2)$ đi qua tiếp điểm $K$ của đường tròn tiếp xúc với $EF, AC$ và $(O)$. Mà qua điểm $K$ chỉ có duy nhất một đường tròn tiếp xúc với $AC$ và tiếp xúc trong với $(O)$, suy ra $(J)$ tiếp xúc với $EF$. Ta có điều phải chứng minh.



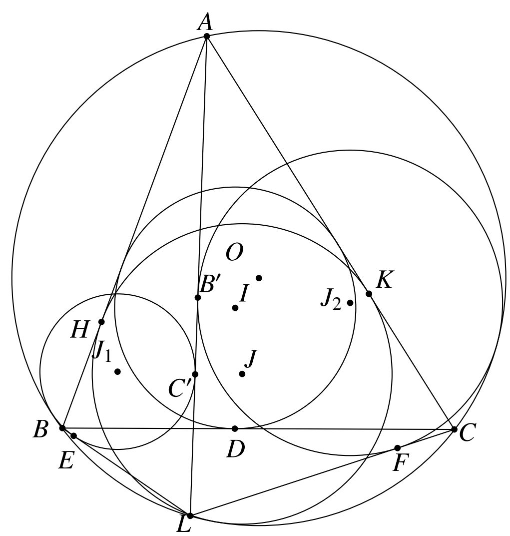

*Cách 2* (của bạn **Ngô Quang Dương**, lớp 11A2 Toán, trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên)

**Tóm tắt lời giải.** Gọi $(J), (J_1), (J_2)$ lần lượt là đường tròn $A-$ mixtilinear của tam giác $ABC$, $P-$ mixtilinear của các tam giác $PAB, PAC$. Đường tròn $(J_1)$ tiếp xúc với $PA, PB$ tại $C', E$; $(J_2)$ tiếp xúc $PA, PC$ tại $B', F$; $(J)$ tiếp xúc $AB, AC$ tại $H, K$. Gọi $t_1, t_2, t$ lần lượt là độ dài tiếp tuyến chung ngoài của $(J_1)$ và $(J)$, $(J_2)$ và $(J)$, $(J_1)$ và $(J_2)$.

Áp dụng định lý Casey cho bốn đường tròn $(A,0), (J_1), (B,0), (J)$ ta có $t_1.AB = AH.BE + BH.AC' = AH.BE + BH.(PA - PC') = AH.BE + BH.(PA - PE)$

Tương tự ta có $t_2.AC = AK.CF + CK.(PA - PF) = AH.CF + CK.(PA - PF)$. Lại áp dụng định lý Casey cho $(A,0), (J_1), (P,0), (J_2)$ ta có $t.AP = PE.AB' + PF.AC' = PE.(PA - PF) + PF.(PA - PE)$

Tiếp theo, ta chứng minh công thức sau $AH = \frac{2AB.AC}{AB+BC+CA}$. Gọi $(I, r)$ là đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$. Theo bổ đề Sawayama suy ra $I$ là trung điểm $HK$, ở đây ta dùng công thức tính bán kính $r_a$ của đường tròn $A-$mixtilinear là $r_a = \frac{r}{\cos^2(A/2)}$. Từ đó




$$\begin{aligned} AH^2 &= AI \cdot AJ = \frac{r}{\sin A/2} \cdot \frac{r_a}{\sin A/2} \\ &= \frac{r^2}{\sin^2 A/2 \cdot \cos^2 A/2} \\ &= \frac{4r^2}{\sin^2 A} = \frac{16R^2r^2}{a^2} = \frac{4a^2b^2c^2}{a^2(a+b+c)^2} = \frac{4b^2c^2}{(a+b+c)^2}. \end{aligned}$$

Như vậy $AH = \frac{2AB.AC}{AB+BC+CA}$. Tương tự ta cũng có $PE = \frac{2PA.PB}{PA+PB+AB}$ , $PF = \frac{2PC.PA}{PC+PA+CA}$.

Ta sẽ chứng minh $t_1 + t_2 = t$ bằng biến đổi tương đương, sử dụng ba đẳng thức vừa thu được và định ly Ptolemy. Mặt khác, $t = DE + DF - \frac{2DE.DF}{DA}$. Như vậy $t_1 + t_2 = t$ tương đương với $\frac{4DA.BC}{AB+BC+CA} + \frac{2DE.DF}{DA} = 2(DE + DF)$.

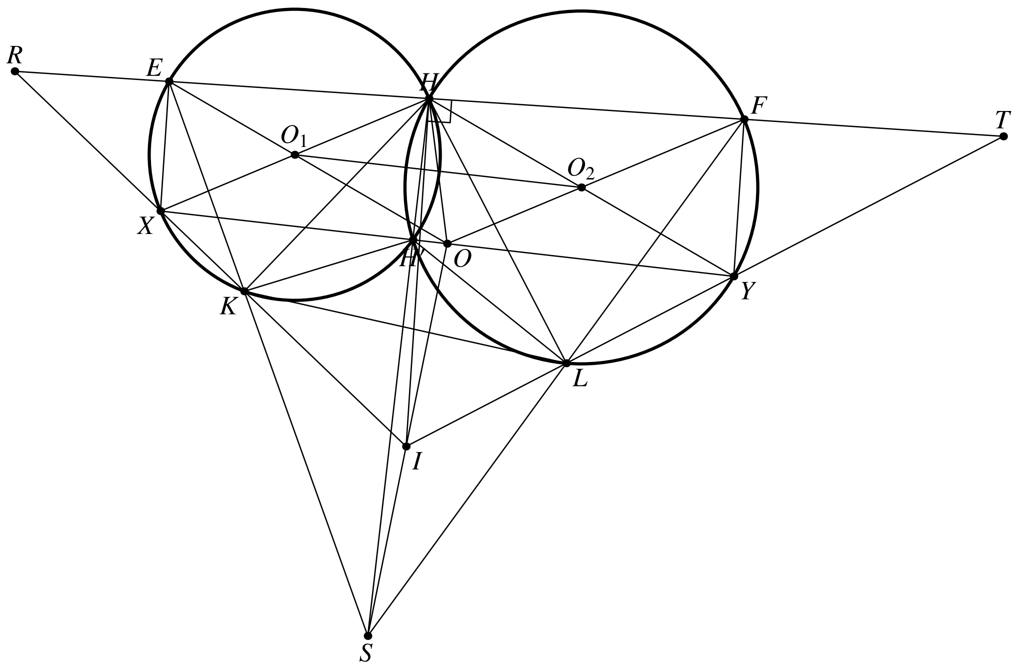
Do $(J_1), (J_2)$ không cắt nhau nên phương tích của $T$ đến ba đường tròn là không âm và bằng $p^2$ đồng thời vẽ được tiếp tuyến từ $T$ đến ba đường tròn mixtilinear. Ta có $p \cdot t_1 + p \cdot t_2 = p \cdot t$ nên theo phần đảo của định lý Casey, tồn tại đường tròn $(C)$ đi qua $T$ và tiếp xúc với $(J), (J_1), (J_2)$. Xét phép nghịch đảo $\mathcal{I}_T^{p^2}: (J) \mapsto (J)$, $(J_1) \mapsto (J_1)$, $(J_2) \mapsto (J_2)$, $(C)$ biến thành đường thẳng tiếp xúc với $(J), (J_1), (J_2)$. Vậy ba đường tròn có một tiếp tuyến chung □

**Nhận xét.** Bạn **Nguyễn Tuấn Hải Đăng**, lớp 12A1 Toán THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, và bạn **Trịnh Huy Vũ**, lớp 11A1 Toán THPT chuyên Khoa học Tự nhiên có cách giải giống cách thứ nhất của đáp án.

**5.** *Trần Minh Ngọc, sinh viên trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ chí Minh* Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Một đường tròn $(I)$ tiếp xúc $AC, BD$ tại $M, N$. Giả sử $MN$ lần lượt cắt $AB, CD$ tại $P, Q$. Gọi $H$ là giao điểm của $AC$ và $BD$; $K, L$ lần lượt là giao điểm khác $I$ của $(IMN)$ với $(HAB)$ ,$(HCD)$. Chứng minh $PK, QL, OI$ đồng quy.

Chúng tôi xin giới thiệu lời giải của bạn **Nguyễn Tuấn Hải Đăng**, lớp 12A1 Toán, THPT chuyên KHTN, Hà Nội

**Bổ đề 1.** Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại $H, H'$. $I$ là một điểm bất kì thuộc tia phân giác $\angle O_1HO_2$. Đường thẳng qua $H$ vuông góc $HI$ cắt $(O_1), (O_2)$ tại $E, F$ khác $H$. $HX, HY$ lần lượt là đường kính của $(O_1), (O_2)$. Gọi $K$ là giao điểm $IX$ với $(O_1)$ ; $L$ là giao điểm $IY$ với $(O_2)$ và $O$ là trung điểm của $XY$. Khi đó $EF, KL, OI$ đồng quy.




**Chứng minh.** Không mất tính tổng quát, giả sử $I$ là một điểm bất kì thuộc tia phân giác trong $\angle O_1HO_2$. Gọi $T, R$ lần lượt là giao điểm của $EF$ với $IL, IK$ và $S$ là giao điểm của $EK, FL$. Từ $\angle HKX = 90^\circ = \angle HLY$ suy ra $H, L, I, K$ thuộc đường tròn đường kính $HI$. Mặt khác $HI \perp EF$ nên $EF$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính $HI$. Suy ra $\angle EHK = \angle HLK$. Hơn nữa $\angle EKH = \angle EXH = 90^\circ - \angle EHX = 90^\circ - \angle FHY = \angle FYH = \angle FLH$ nên $\angle KEF + \angle KLF = 180^\circ$. Suy ra $EFLK$ nội tiếp . Do đó $\mathcal{P}_{S/(KER)} = SE.SK = SF.SL = \mathcal{P}_{S/(LFT)}(1)$.

Từ $\angle ILK = \angle IHK = 90^\circ - \angle EHK = 90^\circ - \angle EXR = \angle KRT$ suy ra $KLTR$ nội tiếp . Do đó $\mathcal{P}_{I/(KER)} = IL.IT = IK.IR = \mathcal{P}_{I/(LFT)}(2)$

Dễ thấy $HO_1OO_2$ là hình bình hành. Suy ra $OO_2 \parallel HX$. Mặt khác từ $\angle XHE = \angle YHF = \angle O_2FH$ suy ra $O_2F \parallel HX$ ,nên $O, O_2, F$ thẳng hàng. Tương tự, ta có $O, O_1, E$ thẳng hàng. Từ $\angle KRE = 90^\circ - \angle EHK = \angle O_1EK = \angle OEK$ suy ra $OE$ là tiếp tuyến của $(KER)$. Tương tự ta có $OE$ là tiếp tuyến của $(LFT)$. Mặt khác từ $\angle OEF = \angle O_1HE = \angle OEF$ suy ra $\Delta OEF$ cân tại $O$ nên $OE = OF$. Do đó $\mathcal{P}_{O/(KER)} = OE^2 = OF^2 = \mathcal{P}_{O/(LFT)}(3)$ .

Từ đây suy ra $S, I, O$ cùng nằm trên trục đẳng phương của $(KER), (LFT)$. Ta có điều phải chứng minh. □

Trở lại bài toán

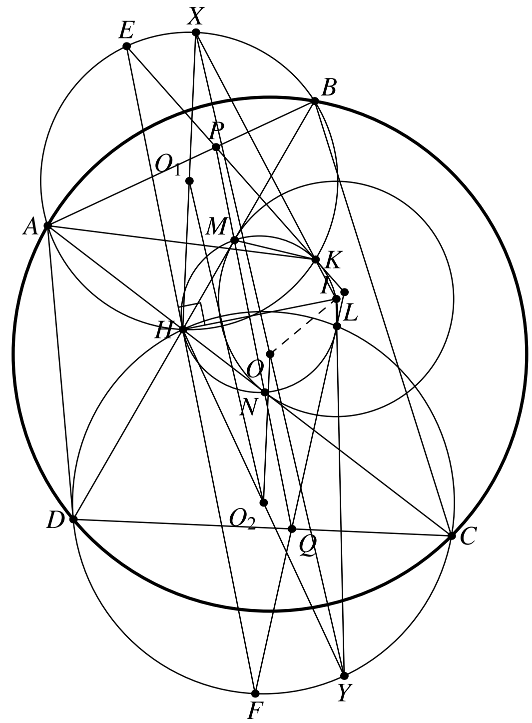
**Lời giải.** Không mất tính tổng quát, giả sử $(I)$ tiếp xúc trong $\angle BHC$. Gọi $HX, HY$ lần lượt là đường kính của $(HAB), (HCD)$. Gọi $O_1, O_2$ lần lượt là tâm của $(HAB), (HCD)$ và $E, F$ lần lượt là giao điểm khác $H$ của đường thẳng qua $H$ vuông góc $HI$ với $(HAB), (HCD)$.

Từ $\angle HKI = \angle HKX = 90^\circ$ suy ra $I, K, X$ thẳng hàng. Tương tự và $I, L, Y$ thẳng hàng. Từ $\angle BHX = 90^\circ - \angle BXH = 90^\circ - \angle BAH = 90^\circ - \angle DAH = 90^\circ - \angle DYH = \angle DHY$ và $\angle BHI = \angle CHI$ suy ra $HI$ là tia phân giác trong $XHY$.

Dễ thấy $O_1H \perp CD$ và $OO_2 \perp CD$. Suy ra $O_1H // OO_2$. Tương tự $O_2H // OO_1$. Do đó $HO_1OO_2$ là hình bình hành. Từ đó suy ra $O$ là trung điểm của $XY$.

Từ $\angle KMN = \angle KHN = \angle KBP$ suy ra $BPMK$ nội tiếp. Do đó $\angle BKP = \angle BMP = \angle HMN = \frac{\angle AHB}{2} = \frac{\angle AKB}{2}$. Suy ra $KP$ là tia phân giác trong của $\angle AKB$.

Mặt khác từ$HE$ là tia phân giác trong của $\angle AHB$ suy ra $E$ là điểm chính giữa cung $AB$ nên $K, P, E$ thẳng hàng. Tương tự $F, Q, L$ thẳng hàng. Bây giờ áp dụng bổ đề ta sẽ được $PK, QL, OI$ đồng quy. Đó là điều phải chứng minh. □

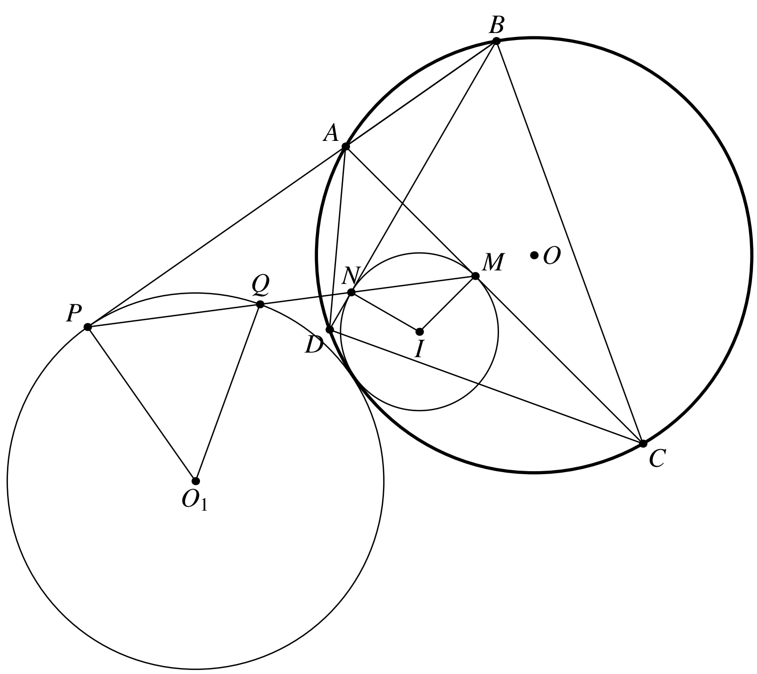



Sau đây chúng tôi xin giới thiệu lời giải của tác giả bài toán

Ta chứng minh bài toán qua các bước sau

**Bước 1.** Chứng minh tồn tại một đường tròn $(O_1)$ tiếp xúc $AB$ tại $P$ , tiếp xúc $CD$ tại $Q$ và $(O), (I), (O_1)$ có chung trục đẳng phương.

Gọi $(O_1)$ là đường tròn qua $Q$ và tiếp xúc $AB$ tại $P$. Từ $\Delta BPN \sim \Delta CQN$ nên $\angle BPN = \angle CQN$ suy ra $CD$ tiếp xúc $(O_1)$ tại $Q$. Ta có biến đổi $\frac{\mathcal{P}_{A/(O_1)}}{\mathcal{P}_{A/(I)}} = \frac{AP^2}{AM^2} = \left(\frac{\sin \angle AMP}{\sin \angle APM}\right)^2 = \left(\frac{\sin \angle BNP}{\sin \angle BPN}\right)^2 = \frac{BP^2}{BN^2} = \frac{\mathcal{P}_{B/(O_1)}}{\mathcal{P}_{B/(I)}}$.

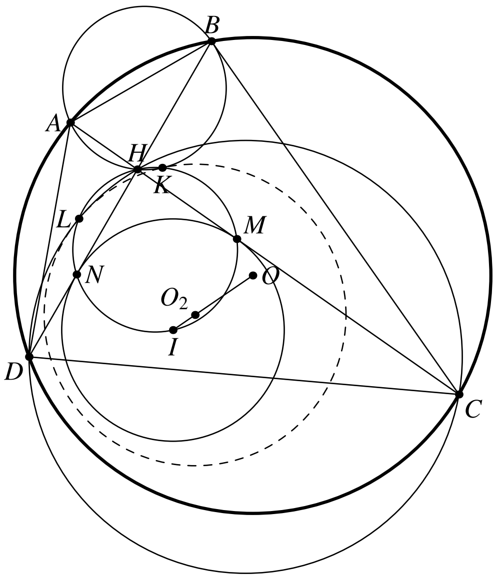



Tương tự $\frac{\mathcal{P}_{A/(O_1)}}{\mathcal{P}_{A/(I)}} = \frac{\mathcal{P}_{C/(O_1)}}{\mathcal{P}_{C/(I)}}$ ;$\frac{\mathcal{P}_{A/(O_1)}}{\mathcal{P}_{A/(I)}} = \frac{\mathcal{P}_{D/(O_1)}}{\mathcal{P}_{D/(I)}}$. Suy ra $\frac{\mathcal{P}_{A/(O_1)}}{\mathcal{P}_{A/(I)}} = \frac{\mathcal{P}_{B/(O_1)}}{\mathcal{P}_{B/(I)}} = \frac{\mathcal{P}_{C/(O_1)}}{\mathcal{P}_{C/(I)}} = \frac{\mathcal{P}_{D/(O_1)}}{\mathcal{P}_{D/(I)}}$. Suy ra $(O), (I), (O_1)$ có chung trục đẳng phương.

**Bước 2.** Chứng minh tồn tại một đường tròn $(O_2)$ tiếp xúc đường tròn $(HAB)$ tại $K$ , tiếp xúc đường tròn $(HCD)$ tại $L$ và $(O),(I),(O_2)$ có chung trục đẳng phương.

Qua phép nghịch đảo $f$ có tâm $H$ , phương tích $k \neq 0$ ,$A,B,C,D,M,N,K,L$ lần lượt biến thành $A',B',C',D',M',N',K',L'$. Khi đó, $AC,BD$ qua $f$ biến thành chính nó nên $A',B' \in AB; C',D' \in CD$; $(I)$ biến thành $(I')$ tiếp xúc với $AC,BD$ tại $M',N'$; $(HAB),(HCD),(HMN)$ lần lượt biến thành $A'B',C'D',M'N'$; $K',L'$ lần lượt là giao điểm $M'N'$ với $A'B',C'D'$

Theo chứng minh ở bước 1 thì tồn tại một đường tròn $(O_2^{'})$ tiếp xúc $A'B'$ tại $K'$ , tiếp xúc $C'D'$ tại $L'$ và $(O),(I),(O_2^{'})$ có chung trục đẳng phương. Do phép nghịch đảo là một phép biến hình đối hợp ($f^{-1} = f$) bảo tồn góc và chùm đường tròn nên có một đường tròn $(O_2) = f(O_2^{'})$ tiếp xúc đường tròn $(HAB)$ tại $K$ ,tiếp xúc đường tròn $(HCD)$ tại $L$ và $(O),(I),(O_2)$ có chung trục đẳng phương.




**Bước 3.** Chứng minh $PK,QL,OI$ đồng quy.

Gọi $d$ là trục đẳng phương của $(O),(I),(O_1),(O_2)$ và $S$ là giao điểm của $PK,QL$. $MN$ là trục đẳng phương của $(I),(HMN)$ ,$KL$ là trục đẳng phương và $d$ là trục đẳng phương của đường tròn $(I),(O_2)$ nên $MN,KL,d$ đồng quy tại $X$. Do $(O_2)$ tiếp xúc $(HAB)$ tại $K$ và tiếp xú $(HCD)$ tại $L$ nên tiếp tuyến tại $K,L$ của đường tròn $(O_2)$ lần lượt là trục đẳng phương của $(O_2),(HAB)$ và $(O_2),(HCD)$. Từ đó, tương tự trên ta được tiếp tuyến tại $K$ của $(O_2),d,AB$ đồng quy tại $Y$ và tiếp tuyến tại $L$ của$(O_2)$ , $d,CD$ đồng quy tại $Z$. Do $YP,YK$ lần lượt là tiếp tuyến của $(O_1),(O_2)$ và $O_1P,O_2K$ là tiếp tuyến của $(Y,YP)$ nên đường tròn $(Y,YP)$ trực giao với $(O_1),(O_2)$. Tương tự, ta được đường tròn $(Z,ZQ)$ trực giao với $(O_1),(O_2)$. Vậy $(Y,YP)(Z,ZQ)$ luôn cắt nhau tại hai điểm nằm trên $O_1O_2 \equiv OI$ suy ra $OI$ chính là trục đẳng phương của $(X,XP),(Y,YQ)$. Mặt khác, $XP \cdot XQ = \mathrm{P}_{X/(w_1)} = \mathrm{P}_{X/(w_2)} = XK \cdot XL$ nên $PQKL$ nội tiếp suy ra $\mathcal{P}_{S/(Y,YP)} = SK \cdot SP = SL \cdot SQ = \mathcal{P}_{S/(Z,ZP)}$. Vậy $S \in OI$.