

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM  
Vietnam Mathematical Society

**MYTS**

Mathematical Young Talent Search



27/03/2016  
02/04/2016



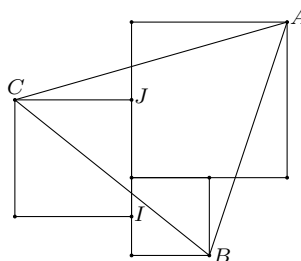
HEXAGON

Hexagon of Maths & Science

## 0.1 Đề thi cho khối lớp 5/ Question Paper for Grade 5

1. Biết rằng số tự nhiên  $N$  chia hết cho 3 và 4, còn khi  $N$  chia 7 thì dư 3, hỏi  $N$  nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

2. Nếu  $K$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MN$  thì  $MK = KN$ . Trong hình bên,  $I, J$  là các trung điểm của các cạnh hình vuông với diện tích  $144 \text{ cm}^2$  và  $400 \text{ cm}^2$ . Tính diện tích của tam giác  $ABC$ .



3. Những người anh em cùng tìm ra một kho báu (gồm vàng và bạc). Họ chia nhau số tài sản thì mỗi người được đúng 120 kg (vàng và bạc). Người anh cả nhận được 30 kg vàng, nhiều hơn số vàng của mỗi người còn lại; người anh cả cũng nhận được  $\frac{1}{8}$  số bạc trong kho báu. Hỏi trong kho báu có bao nhiêu kg vàng?

4. Tính tổng các chữ số của

$$A = 234 \times \underbrace{555 \dots 555}_{66 \text{ chữ số } 5}.$$

5. Trong một hộp có 1 quả bóng ghi số 1, 2 quả bóng được ghi số 2, ..., 100 quả bóng được ghi số 100. Ta lấy bóng từ hộp ra mà không nhìn, hỏi phải lấy ít nhất bao nhiêu quả để đảm bảo trong đó có 10 quả ghi số giống nhau.

6.  $N$  là một số có bốn chữ số mà khi viết các chữ số của nó theo thứ tự ngược lại thì ta thu được một số gấp bốn lần  $N$ . Hãy tính giá trị của  $N$ .

7. Trong một căn phòng có 26 người gồm những người là người thật thà (là người luôn nói thật) và những người là người dối trá (là người luôn nói dối).

Người đầu tiên nói : "Trong phòng không có ai là người thật thà".  
 Người thứ hai nói : "Trong phòng có không quá một người thật thà".  
 Người thứ ba nói : "Trong phòng có không quá hai người thật thà".  
 ⋮  
 Người cuối cùng nói : "Trong phòng không có quá 25 người thật thà".

Hỏi trong phòng có tất cả bao nhiêu người thật thà?

8. Ở xứ sở Magic Wood chỉ có ba loài vật: có 12 con rắn, 23 con chuột và 31 con mèo. Hễ khi con rắn ăn con mèo, thì nó biến thành con chuột, nhưng khi con mèo ăn con chuột thì nó biến thành con rắn. Hơn nữa, khi con rắn ăn con chuột, nó biến thành con mèo. Hỏi nhiều nhất có bao nhiêu con vật ở Magic Wood khi không con nào ăn con nào nữa?

## Đáp án khối lớp 5

1. Biết rằng số tự nhiên  $N$  chia hết cho 3 và 4, còn khi  $N$  chia 7 thì dư 3, hỏi  $N$  nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

*Lời giải.* Từ giả thiết suy ra tồn tại các số nguyên dương  $a, b$  sao cho

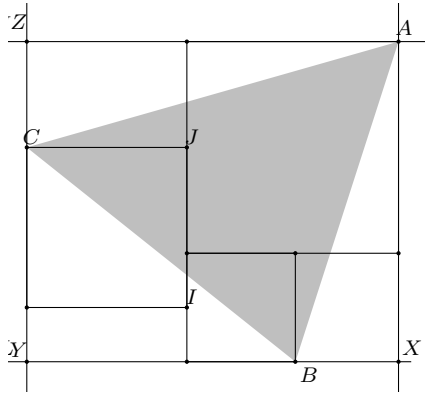
$$N = 7a + 3 = 12b.$$

Thử các giá trị  $b = 1, 2, \dots$  thì tìm được cặp số  $b = 2, a = 3$  là nhỏ nhất. Thử lại thấy  $N = 24$  thỏa mãn. Đáp số  $N = 24$ .  $\square$

2. Trong hình bên,  $I, J$  là các trung điểm của các cạnh hình vuông với diện tích  $144 \text{ cm}^2$  và  $400 \text{ cm}^2$ . Tính diện tích của tam giác  $ABC$ .

*Chứng minh.* Từ giả thiết suy ra cạnh của hai hình vuông là 12 cm và 20 cm. Kéo dài các cạnh của hình vuông để tạo một hình chữ nhật  $AXYZ$ . Dễ thấy, độ dài cạnh hình chữ nhật đó là  $16 + 20 = 36$  và  $20 + 12 = 32$ . Diện tích của ba tam giác vuông  $ZAC, BYC$  và  $BAX$  lần lượt là

$$\frac{36 \times 10}{2}, \quad \frac{22 \times 28}{2}, \quad \frac{32 \times 8}{2}.$$



□

Từ đó, diện tích tam giác là

$$36 \times 32 - 180 - 308 - 128 = 536.$$

Đáp số: 536.

- 3.** Những người anh em cùng tìm ra một kho báu (gồm vàng và bạc). Họ chia nhau số tài sản thì mỗi người được đúng 120 kg (vàng và bạc). Người anh cả nhận được 30 kg vàng, nhiều hơn số vàng của mỗi người còn lại; người anh cả cũng nhận được  $\frac{1}{8}$  số bạc trong kho báu. Hỏi trong kho báu có bao nhiêu kg vàng?

*Lời giải.* Trả lời: 120. Lượng bạc mà người anh cả nhận được là  $120 - 30 = 90$ . Suy ra tổng số bạc trong kho báu là  $90 \times 8 = 720$  kg. Giả sử số người phát hiện ra kho báu là  $n$ . Vậy nên tổng số vàng bạc là  $120n$ . Số vàng là  $120n - 720$ . Ta có

$$\frac{120n - 720}{n} < 30.$$

Lưu ý rằng  $120n \geq 720$ , suy ra  $n \geq 6$ . Kết hợp hai bất đẳng thức cho ta  $n = 7$ . Tức là  $7 \times 120 - 720 = 120$  là lượng vàng trong kho báu. □

4. Tính tổng các chữ số của

$$A = 234 \times \underbrace{555 \dots 555}_{66 \text{ chữ số } 5}.$$

*Lời giải.* Lưu ý số 234 chia hết cho 9 nên ta viết

$$A = 26 \times 9 \times 5 \times \underbrace{111 \dots 111}_{66 \text{ chữ số } 1},$$

hay là

$$A = 130 \times \underbrace{999 \dots 999}_{66 \text{ chữ số } 9}.$$

Lưu ý  $\underbrace{999 \dots 999}_{66 \text{ chữ số } 9} = 10^{66} - 1$ . Vậy nên,

$$A = 130 \underbrace{000 \dots 000}_{66 \text{ chữ số } 0} - 130.$$

Đặt phép tính ta được

$$A = 12 \underbrace{9999 \dots 999}_{64 \text{ chữ số } 9} 870.$$

Thành ra, tổng các chữ số của  $A$  là

$$1 + 2 + 9 \times 64 + 8 + 7 + 0 = 594.$$

Đáp số 594.

□

5. Trong một hộp có 1 quả bóng có số 1, 2 quả bóng có số 2, ..., 100 quả bóng có số 100. Ta lấy bóng từ hộp ra mà không nhìn, hỏi phải lấy ít nhất bao nhiêu quả để đảm bảo trong đó có 10 quả có số giống nhau.

*Lời giải.* Trong trường hợp xấu nhất ta chọn phải tất cả các quả số 1, 2, ..., 9 và mỗi số từ 10 đến 100 mỗi số có 9 quả. Như vậy có tất cả  $45 + 9 \times 91 = 864$  quả. Vậy phải lấy ít nhất 865 quả để đảm bảo có 10 quả cùng số.

Đáp số: 865.

□

6.  $N$  là một số có bốn chữ số mà khi viết các chữ số của nó theo thứ tự ngược lại thì ta thu được một số gấp bốn lần  $N$ . Hãy tính giá trị của  $N$ .

*Lời giải.* Ta cần tìm  $\overline{abcd}$  sao cho  $4 \times \overline{abcd} = \overline{dcba}$ . Chú ý rằng nếu  $a \geq 3$  thì  $4 \times \overline{abcd}$  là số có năm chữ số. Thành ra,  $a = 1$  hoặc  $a = 2$ . Vì  $\overline{dcba}$  là số chẵn nên  $a = 2$ . Ta có

$$4 \times \overline{abcd} \geq 8000.$$

Suy ra  $\overline{dcba} \geq 8000$ . Suy ra  $d = 8$  hoặc  $d = 9$ . Do  $4 \times d$  tận cùng bằng 2 nên suy ra  $d = 8$ . Vậy

$$4 \times \overline{2bc8} = \overline{8cb2}.$$

Liên hệ này biểu diễn qua hệ thập phân cho ta

$$4(2000 + 100b + 10c + 8) = 8000 + 100c + 10b + 2.$$

Tức là  $6c = 39b + 3$ . Nếu  $b \geq 2$  thì  $6c \geq 39 \times 2 + 3 > 60$ , dẫn đến  $c > 10$ , loại.

Vậy nên  $b = 1$ , dẫn đến  $c = 7$ .

Đáp số: 2178.

□

7. Trong một căn phòng có 26 người gồm những người là người thật thà (là người luôn nói thật) và những người là người dối trá (là người luôn nói dối).

Người đầu tiên nói : "Trong phòng không có ai là người thật thà".

Người thứ hai nói : "Trong phòng có không quá một người thật thà".

Người thứ ba nói : "Trong phòng có không quá hai người thật thà".

⋮

Người cuối cùng nói : "Trong phòng không có quá 25 người thật thà".

Hỏi trong phòng có tất cả bao nhiêu người thật thà?

*Lời giải.* Ta có những nhận xét sau:

Nếu một ai đó nói dối, thì tất cả những người trước đó cũng nói dối.

Trong phòng chắc chắn có người dối trá, vì nếu người đầu tiên nói thật thì theo đúng lời anh ta, trong phòng không có người nói thật (mâu thuẫn).

Tương tự, ta cũng kết luận được trong phòng có người thật thà.

Giả sử trong phòng có  $x$  người dối trá. Người cuối cùng nói dối đã nói: "Trong phòng không có quá  $x - 1$  người thật thà", nghĩa là trong phòng có ít nhất  $x$  người thật thà. Mặt khác người thứ  $x + 1$  là người thật thà và từ lời anh ta nói suy ra có không quá  $x$  người thật thà. Tóm lại, có tất cả  $x$  người thật thà. Như vậy  $x + x = 26$  hay  $x = 13$ .

Vậy trong phòng có tất cả 13 người thật thà. □

8. Ở xứ sở Magic Wood chỉ có ba loài vật: có 12 con rắn, 23 con chuột và 31 con mèo. Hễ khi con rắn ăn con mèo, thì nó biến thành con chuột, nhưng khi con mèo ăn con chuột thì nó biến thành con rắn. Hơn nữa, khi con rắn ăn con chuột, nó biến thành con mèo. Hỏi nhiều nhất có bao nhiêu con vật ở Magic Wood khi không con nào ăn con nào nữa?

*Lời giải 1.* Nhiều nhất là một loài sẽ tồn tại. Đó không thể là loài mèo, vì tính chẵn lẻ của mèo và chuột luôn giống nhau. vì vậy, tất cả số mèo sẽ biến mất, tức là cần 31 lần ăn. Kéo theo 35 con vật sẽ tồn tại. Mặt khác, nếu 23 con mèo ăn 23 con chuột, biến thành con rắn, thì sẽ có 35 con rắn và 8 con mèo. Tiếp theo, 4 con rắn sẽ ăn 4 con mèo, biến thành con chuột, và sẽ bị 4 con mèo ăn nốt. Tức là sẽ còn đúng 35 con rắn. □

*Lời giải 2.* Gọi số lần rắn ăn mèo là  $a$ , mèo ăn chuột là  $b$  và rắn ăn chuột là  $c$ . Gọi  $x, y, z$  lần lượt là số rắn, số mèo, và số chuột. Ta có

$$\begin{cases} 12 - a - c + b = x, \\ 31 - a - b + c = y, \\ 23 - b - c + a = z. \end{cases} \quad (1)$$

Không con nào ăn con nào khi trong ba số  $x, y, z$  có hai số bằng 0. Do  $y, z$  cùng tính chẵn lẻ, và  $x$  thì khác tính chẵn lẻ với  $y, z$  nên suy ra

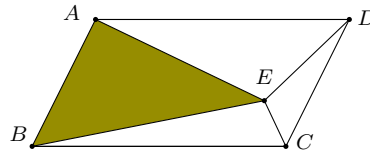
$$31 - a - b + c = 0, \quad \text{và} \quad 23 - b - c + a = 0.$$

Giải hệ này cho ta  $b = 27$ . Do đó,  $a - c = 4$ . Số rấn là  $12 + 27 - a - c = 39 - a - c$ . Để số lượng rấn là lớn nhất thì  $a + c$  phải nhỏ nhất. Tức là  $a + c = a - c + 2c = 4 + 2c$  nhỏ nhất, tức là  $c = 0$ . Vậy nên, đáp số là  $39 - 4 = 35$ .  $\square$



## 0.2 Đề thi cho khối lớp 6/ Question Paper for Grade 6

1. Trong hình bên  $ABCD$  là một hình bình hành có diện tích  $174 \text{ cm}^2$ . Điểm  $E$  nằm trong hình bình hành sao cho tam giác  $ECD$  có diện tích  $28 \text{ cm}^2$ . Nếu diện tích của tam giác  $ABE$  là  $x \text{ cm}^2$ , tính giá trị của  $x$ .



2. Những người anh em cùng tìm ra một kho báu (gồm vàng và bạc). Họ chia nhau số tài sản thì mỗi người được đúng  $120 \text{ kg}$  (vàng và bạc). Người anh cả nhận được  $30 \text{ kg}$  vàng, nhiều hơn số vàng của mỗi người còn lại; người anh cả cũng nhận được  $\frac{1}{8}$  số bạc trong kho báu. Hỏi trong kho báu có bao nhiêu  $\text{kg}$  vàng?
3. Tính tổng các chữ số của

$$A = 234 \times \underbrace{555 \dots 555}_{66 \text{ chữ số } 5}.$$

4. Trong một hộp có 1 quả bóng ghi số 1, 2 quả bóng được ghi số 2, ..., 100 quả bóng được ghi số 100. Ta lấy bóng từ hộp ra mà không nhìn, hỏi phải lấy ít nhất bao nhiêu quả để đảm bảo trong đó có 10 quả ghi số giống nhau.
5. Tìm số có sáu chữ số  $\overline{abcdef}$  mà khi chữ số hàng đơn vị  $f$  được chuyển về vị trí tận cùng bên trái thì ta thu được một số lớn gấp năm lần số ban đầu, tức là  $\overline{fabcde} = 5 \times \overline{abcdef}$ .

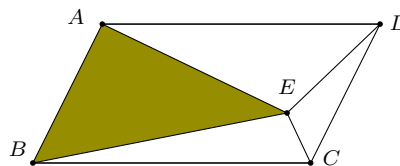
6. Một quả bóng đá được khâu từ 32 miếng da. Mỗi miếng ngũ giác màu đen khâu với 5 miếng màu trắng, và mỗi miếng lục giác màu trắng khâu với 3 miếng màu đen, như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu miếng màu trắng?



7. Trong một căn phòng có 26 người gồm những người là người thật thà (là người luôn nói thật) và những người là người dối trá (là người luôn nói dối).
- Người đầu tiên nói : "Trong phòng không có ai là người thật thà".  
 Người thứ hai nói : "Trong phòng có không quá một người thật thà".  
 Người thứ ba nói : "Trong phòng có không quá hai người thật thà".  
 ⋮  
 Người cuối cùng nói : "Trong phòng không có quá 25 người thật thà".
- Hỏi trong phòng có tất cả bao nhiêu người thật thà?
8. Ở xứ sở Magic Wood chỉ có ba loài vật: có 12 con rắn, 23 con chuột và 31 con mèo. Hễ khi con rắn ăn con mèo, thì nó biến thành con chuột, nhưng khi con mèo ăn con chuột thì nó biến thành con rắn. Hơn nữa, khi con rắn ăn con chuột, nó biến thành con mèo. Hỏi nhiều nhất có bao nhiêu con vật ở Magic Wood khi không con nào ăn con nào nữa?

## Đáp án Khối lớp 6

1. Trong hình bên  $ABCD$  là một hình bình hành có diện tích  $174 \text{ cm}^2$ . Điểm  $E$  nằm trong hình bình hành sao cho tam giác  $ECD$  có diện tích  $28 \text{ cm}^2$ . Nếu diện tích của tam giác  $ABE$  là  $x \text{ cm}^2$ , tính giá trị của  $x$ .



*Lời giải.* Qua điểm  $E$  kẻ đường thẳng song song với  $CD$  thì ta thu được hai hình bình hành. Khi đó, diện tích hình bình hành nhỏ hơn, có diện tích gấp hai lần diện tích tam giác  $ECD$ . Vậy nên ta có

$$2x + 28 \times 2 = 174.$$

Từ đó suy ra  $x = 59$ . □

2. Những người anh em cùng tìm ra một kho báu (gồm vàng và bạc). Họ chia nhau số tài sản thì mỗi người được đúng 120 kg (vàng và bạc). Người anh cả nhận được 30 kg vàng, nhiều hơn số vàng của mỗi người còn lại; người anh cả cũng nhận được  $\frac{1}{8}$  số bạc trong kho báu. Hỏi trong kho báu có bao nhiêu kg vàng?

*Lời giải.* Trả lời: 120. Lượng bạc mà người anh cả nhận được là  $120 - 30 = 90$ . Suy ra tổng số bạc trong kho báu là  $90 \times 8 = 720$  kg. Giả sử số người phát hiện ra kho báu là  $n$ . Vậy nên tổng số vàng bạc là  $120n$ . Số vàng là  $120n - 720$ . Ta có

$$\frac{120n - 720}{n} < 30.$$

Lưu ý rằng  $120n \geq 720$ , suy ra  $n \geq 6$ . Kết hợp hai bất đẳng thức cho ta  $n = 7$ . Tức là  $7 \times 120 - 720 = 120$  là lượng vàng trong kho báu.  $\square$

3. Tính tổng các chữ số của

$$A = 234 \times \underbrace{555 \dots 555}_{66 \text{ chữ số } 5}.$$

*Lời giải.* Lưu ý số 234 chia hết cho 9 nên ta viết

$$A = 26 \times 9 \times 5 \times \underbrace{111 \dots 111}_{66 \text{ chữ số } 1},$$

hay là

$$A = 130 \times \underbrace{999 \dots 999}_{66 \text{ chữ số } 9}.$$

Lưu ý  $\underbrace{999 \dots 999}_{66 \text{ chữ số } 9} = 10^{66} - 1$ . Vậy nên,

$$A = 130 \underbrace{000 \dots 000}_{66 \text{ chữ số } 0} - 130.$$

Đặt phép tính ta được

$$A = 12 \underbrace{9999 \dots 999}_{64 \text{ chữ số } 9} 870.$$

Thành ra, tổng các chữ số của  $A$  là

$$1 + 2 + 9 \times 64 + 8 + 7 + 0 = 594.$$

Đáp số 594.

□

4. Trong một hộp có 1 quả bóng có số 1, 2 quả bóng có số 2, ..., 100 quả bóng có số 100. Ta lấy bóng từ hộp ra mà không nhìn, hỏi phải lấy ít nhất bao nhiêu quả để đảm bảo trong đó có 10 quả có số giống nhau.

*Lời giải.* Trong trường hợp xấu nhất ta chọn phải tất cả các quả số 1, 2, ..., 9 và mỗi số từ 10 đến 100 mỗi số có 9 quả. Như vậy có tất cả  $45 + 9 \times 91 = 864$  quả. Vậy phải lấy ít nhất 865 quả để đảm bảo có 10 quả cùng số.

Đáp số: 865.

□

5. Tìm số có sáu chữ số  $\overline{abcdef}$  mà khi chữ số hàng đơn vị  $f$  được chuyển về vị trí tận cùng bên trái thì ta thu được một số lớn gấp năm lần số ban đầu, tức là  $\overline{fabcde} = 5 \times \overline{abcdef}$ .

**Solution.** Đặt  $x = \overline{abcde}$  thì ta cần giải phương trình

$$5(10x + f) = f \times 10^5 + x.$$

Phương trình này tương đương với  $49x = 99995f$ , hay  $7x = 14285f$ . Vì vế trái là bội của 7 và vì 14285 không phải là bội của 7 nên  $f = 7$  (nó là chữ số), và do đó  $x = 14285$ . Đáp số 142857.

6. Một quả bóng đá được khâu từ 32 miếng da. Mỗi miếng ngũ giác màu đen khâu với 5 miếng màu trắng, và mỗi miếng lục giác màu trắng khâu với 3 miếng màu đen, như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu miếng màu trắng?



*Lời giải.* Gọi  $x$  là số miếng da màu trắng. Thì ta có

$$x + \frac{3}{5}x = 32.$$

Suy ra  $\frac{8}{5}x = 32$ , tức là  $x = 20$ . Đáp số: 20.

□

- Thí sinh cho đáp số đúng nhưng không giải thích được thì cho +1 điểm.

7. Trong một căn phòng có 26 người gồm những người là người thật thà (là người luôn nói thật) và những người là người dối trá (là người luôn nói dối).

Người đầu tiên nói : "Trong phòng không có ai là người thật thà".  
Người thứ hai nói : "Trong phòng có không quá một người thật thà".  
Người thứ ba nói : "Trong phòng có không quá hai người thật thà".  
⋮  
Người cuối cùng nói : "Trong phòng không có quá 25 người thật thà".

Hỏi trong phòng có tất cả bao nhiêu người thật thà?

*Lời giải.* Ta có những nhận xét sau:

Nếu một ai đó nói dối, thì tất cả những người trước đó cũng nói dối.

Trong phòng chắc chắn có người dối trá, vì nếu người đầu tiên nói thật thì theo đúng lời anh ta, trong phòng không có người nói thật (mâu thuẫn).

Tương tự, ta cũng kết luận được trong phòng có người thật thà.

Giả sử trong phòng có  $x$  người dối trá. Người cuối cùng nói dối đã nói: "Trong phòng không có quá  $x - 1$  người thật thà", nghĩa là trong phòng có ít nhất  $x$  người thật thà. Mặt khác người thứ  $x + 1$  là người thật thà và từ lời anh ta nói suy ra có không quá  $x$  người thật thà. Tóm lại, có tất cả  $x$  người thật thà. Như vậy  $x + x = 26$  hay  $x = 13$ .

Vậy trong phòng có tất cả 13 người thật thà.

□

8. Ở xứ sở Magic Wood chỉ có ba loài vật: có 12 con rắn, 23 con chuột và 31 con mèo. Hễ khi con rắn ăn con mèo, thì nó biến thành con chuột, nhưng

khi con mèo ăn con chuột thì nó biến thành con rắn. Hơn nữa, khi con rắn ăn con chuột, nó biến thành con mèo. Hỏi nhiều nhất có bao nhiêu con vật ở Magic Wood khi không con nào ăn con nào nữa?

*Lời giải.* Nhiều nhất là một loài sẽ tồn tại. Đó không thể là loài mèo, vì tính chẵn lẻ của mèo và chuột luôn giống nhau. vì vậy, tất cả số mèo sẽ biến mất, tức là cần 31 lần ăn. Kéo theo 35 con vật sẽ tồn tại. Mặt khác, nếu 23 con mèo ăn 23 con chuột, biến thành con rắn, thì sẽ có 35 con rắn và 8 con mèo. Tiếp theo, 4 con rắn sẽ ăn 4 con mèo, biến thành con chuột, và sẽ bị 4 con mèo ăn nốt. Tức là sẽ còn đúng 35 con rắn.

□

*Lời giải.* Gọi số lần rắn ăn mèo là  $a$ , mèo ăn chuột là  $b$  và rắn ăn chuột là  $c$ . Gọi  $x, y, z$  lần lượt là số rắn, số mèo, và số chuột. Ta có

$$\begin{cases} 12 - a - c + b = x, \\ 31 - a - b + c = y, \\ 23 - b - c + a = z. \end{cases} \quad (2)$$

Không con nào ăn con nào khi trong ba số  $x, y, z$  có hai số bằng 0. Do  $y, z$  cùng tính chẵn lẻ, và  $x$  thì khác tính chẵn lẻ với  $y, z$  nên suy ra

$$31 - a - b + c = 0, \quad \text{và} \quad 23 - b - c + a = 0.$$

Giải hệ này cho ta  $b = 27$ . Do đó,  $a - c = 4$ . Số rắn là  $12 + 27 - a - c = 39 - a - c$ . Để số lượng rắn là lớn nhất thì  $a + c$  phải nhỏ nhất. Tức là  $a + c = a - c + 2c = 4 + 2c$  nhỏ nhất, tức là  $c = 0$ . Vậy nên, đáp số là  $39 - 4 = 35$ .

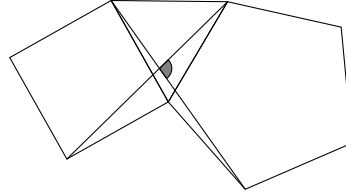
□



HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Kỳ thi Tìm Kiếm Tài năng Toán học trẻ

1. Một hình vuông và một hình ngũ giác đều được vẽ ra phía ngoài của một tam giác đều. Tính số đo góc được đánh dấu.

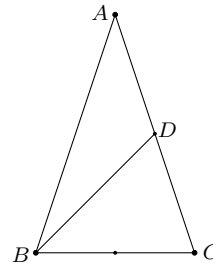


2. Ba số thực  $x, y, z$  thỏa mãn

$$|x| - 3 = |y| + 4 = 10 - |z|.$$

Tìm giá trị lớn nhất của  $K = y(x + z)$ .

3. Tam giác  $ABC$  cân có  $AB = AC = 8$  cm. Đường trung tuyến  $BD = 6$  cm. Nếu  $BC^2 = x$  cm, tính giá trị của  $x$ .



4. Trong một căn phòng có 26 người gồm những người là người thật thà (là người luôn nói thật) và những người là người dối trá (là người luôn nói dối).

Người đầu tiên nói : "Trong phòng không có ai là người thật thà".  
Người thứ hai nói : "Trong phòng có không quá một người thật thà".  
Người thứ ba nói : "Trong phòng có không quá hai người thật thà".  
⋮  
Người cuối cùng nói : "Trong phòng không có quá 25 người thật thà".

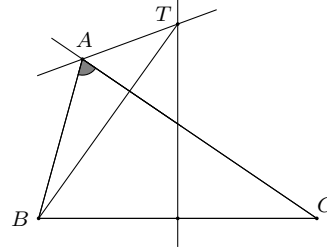
Hỏi trong phòng có tất cả bao nhiêu người thật thà?

5. Giả sử  $K$  là một bộ số gồm mười số (không nhất thiết khác nhau) sao cho mỗi số trong  $K$  đều bằng tổng bình phương của tất cả chín số còn lại. Hãy tìm tất cả những bộ số  $K$  như vậy.
6. Ở xứ sở Magic Wood chỉ có ba loài vật: có 12 con rắn, 23 con chuột và 31 con mèo. Hễ khi con rắn ăn con mèo, thì nó biến thành con chuột, nhưng

| 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |

khi con mèo ăn con chuột thì nó biến thành con rắn. Hơn nữa, khi con rắn ăn con chuột, nó biến thành con mèo. Hỏi nhiều nhất có bao nhiêu con vật ở Magic Wood khi không con nào ăn con nào nữa?

7. Tam giác  $ABC$  có góc  $\angle BAC = 70^\circ$ . Đường trung trực của cạnh  $BC$  cắt phân giác ngoài của góc  $A$  tại  $T$ . Biết rằng góc  $\angle BAT$  tù, còn góc  $\angle CAT$  nhọn, hãy tính số đo góc  $\angle TBC$ .

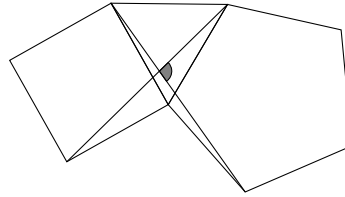


8. Xung quanh một bờ hồ hình tròn có trồng 5 cây dừa. Người ta nhận thấy rằng các độ lệch chiều cao giữa hai cây liên tiếp bất kỳ luôn bằng nhau. Chứng minh rằng cả năm cây đều có cùng chiều cao.



## Đáp án Khối lớp 7

1. Một hình vuông và một hình ngũ giác đều được vẽ ra phía ngoài của một tam giác đều. Tính số đo góc được đánh dấu.



*Lời giải.* Dễ thấy tam giác  $CAF$  cân tại  $A$  vì  $AC = AF$ . Mỗi góc trong của ngũ giác đều là  $108^\circ$ , nên  $\angle CAF = 60^\circ + 108^\circ = 168^\circ$ . Do đó,

$$\angle CFA = \angle FCA = \frac{180^\circ - 168^\circ}{2} = 6^\circ.$$

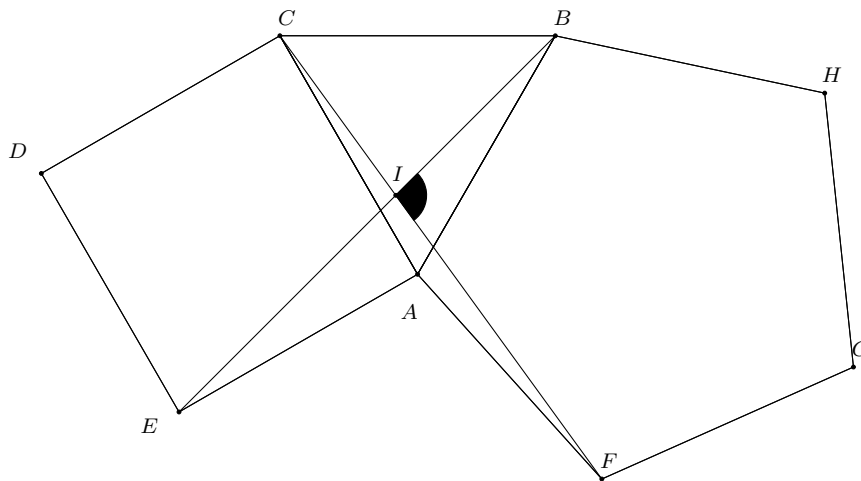
Thành ra,  $\angle BCI = 60^\circ - 6^\circ = 54^\circ$ .

Tương tự, ta tính được góc  $\angle EBA$  của tam giác cân  $ABE$ .

$$\angle ABE = \angle AEB = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Từ đó,  $\angle CBI = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$ . Vậy, góc cần tìm (đánh dấu) chính là góc ngoài của tam giác  $CBI$  tại đỉnh  $I$ . Thành ra,

$$\angle BIF = 45^\circ + 54^\circ = 99^\circ.$$



| 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |

□

2. Ba số thực  $x, y, z$  thỏa mãn

$$|x| - 3 = |y| + 4 = 10 - |z|.$$

Tìm giá trị lớn nhất của  $K = y(x + z)$ .

*Chứng minh.* Từ giả thiết suy ra  $|x| + |z| = 13$ . Lưu ý rằng

$$x + z \leq |x| + |z| = 13, \text{ với mọi } x, z \in \mathbb{R}.$$

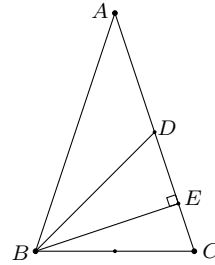
Lại vì  $|y| + 4 = 10 - |z| \leq 10$  nên  $|y| \leq 6$ . Thành ra

$$K \leq 13 \times 6 = 78.$$

Có thể chọn  $x = 13, y = 6, z = 0$ . Đáp số: 78.

□

3. Tam giác  $ABC$  cân có  $AB = AC = 8$  cm. Đường trung tuyến  $BD = 6$  cm. Nếu  $BC^2 = x$  cm, tính giá trị của  $x$ .



*Lời giải.* Hạ đường cao  $BE$ , và gọi  $DE = k$ . Áp dụng định lý Pythagore cho hai tam giác vuông  $ABE$  và  $BDE$  ta được

$$BE^2 = AB^2 - AE^2, \text{ và } BE^2 = BD^2 - DE^2.$$

Thay các giá trị độ dài cho ta

$$BE^2 = 8^2 - (4 + k)^2, \text{ và } BE^2 = 6^2 - k^2.$$

Trừ từng vế ta được

$$8^2 - 6^2 - (4 + k)^2 + k^2 = 0.$$

| 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |

Khai triển và tính toán ta được  $k = 3/2$ . Từ đó,

$$BE^2 = \frac{135}{4}, \quad EC^2 = \frac{25}{4}.$$

Do đó,

$$BC^2 = \frac{135 + 25}{4} = \frac{160}{4} = 40.$$

Đáp số:  $x = 40$ . □

4. Trong một căn phòng có 26 người gồm những người là người thật thà (là người luôn nói thật) và những người là người dối trá (là người luôn nói dối).

Người đầu tiên nói : "Trong phòng không có ai là người thật thà".  
 Người thứ hai nói : "Trong phòng có không quá một người thật thà".  
 Người thứ ba nói : "Trong phòng có không quá hai người thật thà".  
 ⋮  
 Người cuối cùng nói : "Trong phòng không có quá 25 người thật thà".

Hỏi trong phòng có tất cả bao nhiêu người thật thà?

*Lời giải.* Ta có những nhận xét sau:

Nếu một ai đó nói dối, thì tất cả những người trước đó cũng nói dối.

Trong phòng chắc chắn có người dối trá, vì nếu người đầu tiên nói thật thì theo đúng lời anh ta, trong phòng không có người nói thật (mâu thuẫn).

Tương tự, ta cũng kết luận được trong phòng có người thật thà.

Giả sử trong phòng có  $x$  người dối trá. Người cuối cùng nói dối đã nói: "Trong phòng không có quá  $x - 1$  người thật thà", nghĩa là trong phòng có ít nhất  $x$  người thật thà. Mặt khác người thứ  $x + 1$  là người thật thà và từ lời anh ta nói suy ra có không quá  $x$  người thật thà. Tóm lại, có tất cả  $x$  người thật thà. Như vậy  $x + x = 26$  hay  $x = 13$ .

Vậy trong phòng có tất cả 13 người thật thà. □

5. Giả sử  $K$  là một bộ số gồm mười số (không nhất thiết khác nhau) sao cho mỗi số trong  $K$  đều bằng tổng bình phương của tất cả chín số còn lại. Hãy tìm tất cả những bộ số  $K$  như vậy.

| 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |

*Hướng dẫn.* Không mất tính tổng quát có thể giả sử mười số trong tập  $K$  có thứ tự như sau

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{10}.$$

Từ giả thiết rằng mỗi số  $a_j$  đều có thể viết dưới dạng tổng bình phương của chín số còn lại nên ta có thể chọn  $j = 1$  và  $j = 10$ . Thành ra

$$a_1 = a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{10}^2, \text{ và } a_{10} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_9^2.$$

Từ đây có thể suy ra ngay rằng tất cả các số trong  $K$  đều không âm. Vì  $a_1 \leq a_{10}$  nên suy ra

$$a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{10}^2 \leq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_9^2.$$

Tức là  $a_{10}^2 \leq a_1^2$ . Suy ra  $a_{10} \leq a_1$  vì các số đều không âm. Tức là có thể suy ra tất cả các số trong tập  $K$  bằng nhau. Cho nên  $a_j = 9a_j^2$ , hay  $a_j = 0$  hoặc  $a_j = \frac{1}{9}$ . Đáp số:

$$K = \left\{ (0, 0, \dots, 0), \left( \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{9} \right) \right\}.$$

□

6. Ở xứ sở Magic Wood chỉ có ba loài vật: có 12 con rắn, 23 con chuột và 31 con mèo. Hễ khi con rắn ăn con mèo, thì nó biến thành con chuột, nhưng khi con mèo ăn con chuột thì nó biến thành con rắn. Hơn nữa, khi con rắn ăn con chuột, nó biến thành con mèo. Hỏi nhiều nhất có bao nhiêu con vật ở Magic Wood khi không con nào ăn con nào nữa?

*Lời giải.* Nhiều nhất là một loài sẽ tồn tại. Đó không thể là loài mèo, vì tính chẵn lẻ của mèo và chuột luôn giống nhau. vì vậy, tất cả số mèo sẽ biến mất, tức là cần 31 lần ăn. Kéo theo 35 con vật sẽ tồn tại. Mặt khác, nếu 23 con mèo ăn 23 con chuột, biến thành con rắn, thì sẽ có 35 con rắn và 8 con mèo. Tiếp theo, 4 con rắn sẽ ăn 4 con mèo, biến thành con chuột, và sẽ bị 4 con mèo ăn nốt. Tức là sẽ còn đúng 35 con rắn.

□

| 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |

*Lời giải 2.* Gọi số lần rắn ăn mèo là  $a$ , mèo ăn chuột là  $b$  và rắn ăn chuột là  $c$ . Gọi  $x, y, z$  lần lượt là số rắn, số mèo, và số chuột. Ta có

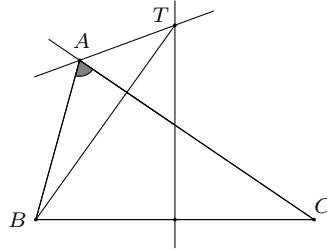
$$\begin{cases} 12 - a - c + b = x, \\ 31 - a - b + c = y, \\ 23 - b - c + a = z. \end{cases} \quad (3)$$

Không con nào ăn con nào khi trong ba số  $x, y, z$  có hai số bằng 0. Do  $y, z$  cùng tính chẵn lẻ, và  $x$  thì khác tính chẵn lẻ với  $y, z$  nên suy ra

$$31 - a - b + c = 0, \quad \text{và} \quad 23 - b - c + a = 0.$$

Giải hệ này cho ta  $b = 27$ . Do đó,  $a - c = 4$ . Số rắn là  $12 + 27 - a - c = 39 - a - c$ . Để số lượng rắn là lớn nhất thì  $a + c$  phải nhỏ nhất. Tức là  $a + c = a - c + 2c = 4 + 2c$  nhỏ nhất, tức là  $c = 0$ . Vậy nên, đáp số là  $39 - 4 = 35$ .  $\square$

7. Tam giác  $ABC$  có góc  $\angle BAC = 70^\circ$ . Đường trung trực của cạnh  $BC$  cắt phân giác ngoài của góc  $A$  tại  $T$ . Biết rằng góc  $\angle BAT$  tù, còn góc  $\angle CAT$  nhọn, hãy tính số đo góc  $\angle TBC$ .



*Lời giải.* Kẻ  $TH, TK$  lần lượt vuông góc với  $AB, AC$ . Do góc  $\angle BAT$  tù và  $\angle AHT = 90^\circ$  nên  $H$  thuộc tia đối của tia  $AB$ .

Vì  $\angle CAT$  nhọn và  $\angle TKC$  vuông nên  $K$  thuộc tia  $AC$ . Vậy nên,  $\angle HAT = \angle TAK$ .

Suy ra, hai tam giác bằng nhau  $\triangle TAH = \triangle TAK$ . Dẫn đến,  $TH = TK$ , mà  $TB = TC$  nên suy ra hai tam giác bằng nhau  $TBH$  và  $TCK$ . Suy ra

$$\angle TBH = \angle TCK,$$

thành ra  $\angle TBA = \angle TCA$ .

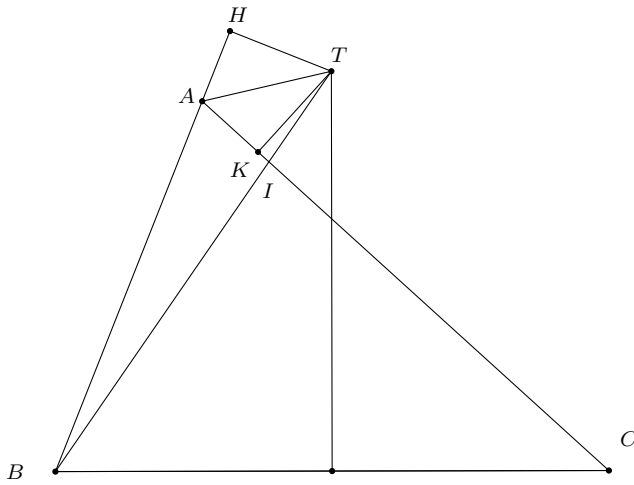


Do  $\angle CAT$  nhỏ hơn góc  $BAT$  nên  $T, B$  thuộc hai nửa mặt phẳng bờ  $AC$ . Đoạn  $BT$  cắt  $AC$  tại  $I$ . Do  $\angle AIB = \angle TIC$  và  $\angle ABI = \angle TCI$ , suy ra  $\angle BAI = \angle CTI$ .

Suy ra,  $\angle BTC = \angle BAC = 70^\circ$ , suy ra  $\angle TBC = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$ .

Do  $\angle CAT$  nhỏ hơn góc  $BAT$  nên  $T, B$  thuộc hai nửa mặt phẳng bờ  $AC$ . Đoạn  $BT$  cắt  $AC$  tại  $I$ . Do  $\angle AIB = \angle TIC$  và  $\angle ABI = \angle TCI$ , suy ra  $\angle BAI = \angle CTI$ .

Suy ra,  $\angle BTC = \angle BAC = 70^\circ$ , suy ra  $\angle TBC = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$ .



□

8. Xung quanh một bờ hồ hình tròn có trồng 5 cây dừa. Người ta nhận thấy rằng các độ lệch chiều cao giữa hai cây liên tiếp bất kỳ luôn bằng nhau. Chứng minh rằng cả năm cây đều có cùng chiều cao.

*Chứng minh.* Đặt  $|a - b| = |b - c| = |c - d| = |d - e| = |e - a| = k \geq 0$ , thì ta có  $a - b = \epsilon_1 k$ ,  $b - c = \epsilon_2 k$ ,  $c - d = \epsilon_3 k$ ,  $d - e = \epsilon_4 k$ ,  $e - a = \epsilon_5 k$ , với  $\epsilon_j = \pm 1$ . Cộng từng vế cho ta

$$0 = k(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5).$$

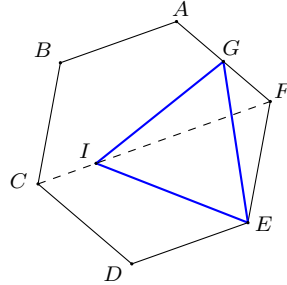
Do tổng các  $\epsilon_j$  trên là số lẻ nên từ đó suy ra  $k = 0$ , kéo theo  $a = b = c = d = e$ . □



HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

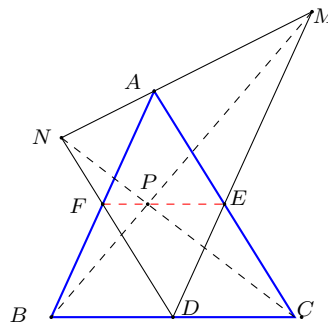
Kỳ thi Tìm Kiếm Tài năng Toán học trẻ

1. Cho lục giác đều  $ABCDEF$ , với  $G$  là trung điểm của  $FA$ , còn  $I$  là điểm trên đường chéo  $CF$  sao cho  $IC = \frac{1}{3}IF$ . Chứng minh rằng tam giác  $IGE$  đều.



2. Biết rằng  $\alpha$  là nghiệm duy nhất của đa thức  $P(x) = x^3 + 9x - 5$ ; và  $\beta$  là nghiệm thực duy nhất của đa thức  $Q(x) = x^3 - 15x^2 + 84x - 165$ . Chứng minh rằng  $\alpha + \beta = 5$ .
3. Bác Dư chép lên bảng các số tự nhiên từ 1 đến  $n$ . Do sơ suất, bác Dư quên viết một số tự nhiên nên trung bình cộng của các số trên bảng là  $\frac{599}{17}$ . Hỏi bác Dư đã quên viết số nào?
4. Ở xứ sở Magic Wood chỉ có ba loài vật: có 12 con rắn, 23 con chuột và 31 con mèo. Hễ khi con rắn ăn con mèo, thì nó biến thành con chuột, nhưng khi con mèo ăn con chuột thì nó biến thành con rắn. Hơn nữa, khi con rắn ăn con chuột, nó biến thành con mèo. Hỏi nhiều nhất có bao nhiêu con vật ở Magic Wood khi không con nào có thể ăn con nào nữa?
5. Giả sử  $K$  là một bộ số gồm mười số (không nhất thiết khác nhau) sao cho mỗi số trong  $K$  đều bằng tổng bình phương của tất cả chín số còn lại. Hãy tìm tất cả những bộ số  $K$  như vậy.

6. Cho tam giác  $ABC$  với  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA$  và  $AB$ . Một đường thẳng đi qua  $A$  cắt  $DE, DF$  tại  $M, N$  tương ứng. Gọi  $P$  là giao điểm của  $BM$ , và  $CN$ . Chứng minh rằng ba điểm  $E, F, P$  thẳng hàng.





7. Xung quanh một bờ hồ hình tròn có trồng 5 cây dừa. Người ta nhận thấy rằng các độ lệch chiều cao giữa hai cây liên tiếp bất kỳ luôn bằng nhau. Chứng minh rằng cả năm cây đều có cùng chiều cao.

8. Xác định tất cả các số nguyên dương  $n$  sao cho

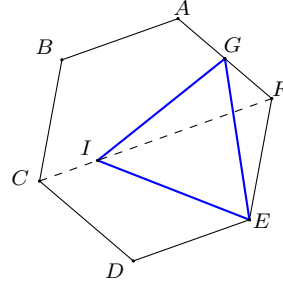
$$\frac{7n - 12}{2^n} + \frac{2n - 14}{3^n} + \frac{24n}{6^n} = 1.$$





## Đáp án Khối lớp 8

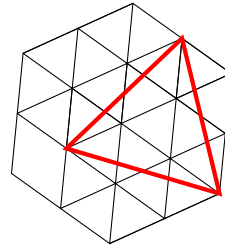
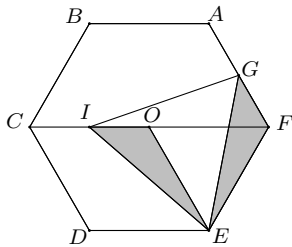
1. Cho lục giác đều  $ABCDEF$ , với  $G$  là trung điểm của  $FA$ , còn  $I$  là điểm trên đường chéo  $CF$  sao cho  $IC = \frac{1}{3}IF$ . Chứng minh rằng tam giác  $IGE$  đều.



*Lời giải.* Gọi  $O$  là trung điểm của  $CF$ . Vì lục giác  $ABCDEF$  đều và tính đối xứng nên  $O$  cũng là tâm của lục giác. Ta sẽ chứng minh hai tam giác  $IOE$ ,  $GFE$  bằng nhau.

Ta có  $OE = OF$ . Lại có  $OI = OC/2 = AF/2 = GF$ . Mặt khác,  $\angle EFG = \angle EOI = 120^\circ$ . Suy ra hai tam giác  $EFG$  và  $EOI$  bằng nhau. Suy ra  $EG = EI$ , và  $\angle GEF = \angle IEO$ . Suy ra  $\angle GEI = \angle FEO = 60^\circ$ . Vậy nên, tam giác  $IGE$  đều.

Các khác là vẽ lưới tam giác đều.



Người đề xuất: Phạm Văn Thuận. □

2. Biết rằng  $\alpha$  là nghiệm duy nhất của đa thức  $P(x) = x^3 + 9x - 5$ ; và  $\beta$  là nghiệm thực duy nhất của đa thức  $Q(x) = x^3 - 15x^2 + 84x - 165$ . Chứng minh rằng  $\alpha + \beta = 5$ .

*Chứng minh.* Vì  $\alpha$  là nghiệm của đa thức  $P(x)$  nên ta có  $\alpha^3 + 9\alpha - 5 = 0$ . Lưu ý rằng là  $\beta$  là nghiệm của  $Q(x)$  nên

$$Q(\beta) = \beta^3 - 15\beta^2 + 84\beta - 165 = 0.$$



Ta sẽ chứng minh  $5 - \alpha$  cũng là nghiệm của  $Q(x)$ . Thực vậy, ta có

$$Q(5 - \alpha) = (5 - \alpha)^3 - 15(5 - \alpha)^2 + 84(5 - \alpha) - 165 = -\alpha^3 - 9\alpha + 5 = 0.$$

Tức là  $5 - \alpha$  là nghiệm của  $Q(x)$ , mà  $\beta$  cũng là nghiệm của  $Q(x)$ . Vì tính duy nhất nghiệm thực, suy ra  $5 - \alpha = \beta$ , tức là  $\alpha + \beta = 5$ .

Người đề xuất: Nguyễn Tiến Lâm, Phạm Văn Thuận. □

3. Bác Dư chép lên bảng các số tự nhiên từ 1 đến  $n$ . Do sơ suất, bác Dư quên viết một số tự nhiên nên trung bình cộng của các số trên bảng là  $\frac{599}{17}$ . Hỏi bác Dư đã quên viết số nào?

*Chứng minh.* Giả sử số bỏ sót là  $d$ . Khi đó, tổng  $S$  các số tự nhiên còn lại là

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n - d = \frac{n(n+1)}{2} - d.$$

Vì trung bình cộng của các số trên bảng là  $\frac{599}{17}$  nên ta có  $S = \frac{599}{17}(n-1)$ .  
Vậy nên

$$\frac{n(n+1)}{2} - d = \frac{599}{17}(n-1).$$

Lưu ý  $d \leq n$  nên

$$\frac{599}{17}(n-1) \geq \frac{n(n+1)}{2} - n.$$

Bất đẳng thức này cho ta  $n \leq 70$ . Lại có  $\frac{599}{17}(n-1) \leq \frac{n(n+1)}{2} - 1$ . Bất đẳng thức này cho ta  $n \geq 69$ . Để  $S$  là số tự nhiên thì  $n-1$  phải chia hết cho 17. Nghĩa là  $n = 69$ . Từ đó suy ra  $d = 19$ . Đáp số: 19. □

4. Ở xứ sở Magic Wood chỉ có ba loài vật: có 12 con rắn, 23 con chuột và 31 con mèo. Hễ khi con rắn ăn con mèo, thì nó biến thành con chuột, nhưng khi con mèo ăn con chuột thì nó biến thành con rắn. Hơn nữa, khi con rắn ăn con chuột, nó biến thành con mèo. Hỏi nhiều nhất có bao nhiêu con vật ở Magic Wood khi không con nào ăn con nào nữa?



*Lời giải.* Nhiều nhất là một loài sẽ tồn tại. Đó không thể là loài mèo, vì tính chẵn lẻ của mèo và chuột luôn giống nhau. Vì vậy, tất cả số mèo sẽ biến mất, tức là cần 31 lần ăn. Kéo theo 35 con vật sẽ tồn tại. Mặt khác, nếu 23 con mèo ăn 23 con chuột, biến thành con rắn, thì sẽ có 35 con rắn và 8 con mèo. Tiếp theo, 4 con rắn sẽ ăn 4 con mèo, biến thành con chuột, và sẽ bị 4 con mèo ăn nốt. Tức là sẽ còn đúng 35 con rắn.  $\square$

*Lời giải 2.* Gọi số lần rắn ăn mèo là  $a$ , mèo ăn chuột là  $b$  và rắn ăn chuột là  $c$ . Gọi  $x, y, z$  lần lượt là số rắn, số mèo, và số chuột. Ta có

$$\begin{cases} 12 - a - c + b = x, \\ 31 - a - b + c = y, \\ 23 - b - c + a = z. \end{cases} \quad (4)$$

Không con nào ăn con nào khi trong ba số  $x, y, z$  có hai số bằng 0. Do  $y, z$  cùng tính chẵn lẻ, và  $x$  thì khác tính chẵn lẻ với  $y, z$  nên suy ra

$$31 - a - b + c = 0, \quad \text{và} \quad 23 - b - c + a = 0.$$

Giải hệ này cho ta  $b = 27$ . Do đó,  $a - c = 4$ . Số rắn là  $12 + 27 - a - c = 39 - a - c$ . Để số lượng rắn là lớn nhất thì  $a + c$  phải nhỏ nhất. Tức là  $a + c = a - c + 2c = 4 + 2c$  nhỏ nhất, tức là  $c = 0$ . Vậy nên, đáp số là  $39 - 4 = 35$ .  $\square$

Người đề xuất: Dusan Djukic.

5. Giả sử  $K$  là một bộ số gồm mười số (không nhất thiết khác nhau) sao cho mỗi số trong  $K$  đều bằng tổng bình phương của tất cả chín số còn lại. Hãy tìm tất cả những bộ số  $K$  như vậy.

*Hướng dẫn.* Không mất tính tổng quát có thể giả sử mười số trong tập  $K$  có thứ tự như sau

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{10}.$$



Từ giả thiết rằng mỗi số  $a_j$  đều có thể viết dưới dạng tổng bình phương của chín số còn lại nên ta có thể chọn  $j = 1$  và  $j = 10$ . Thành ra

$$a_1 = a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{10}^2, \text{ và } a_{10} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_9^2.$$

Từ đây có thể suy ra ngay rằng tất cả các số trong  $K$  đều không âm. Vì  $a_1 \leq a_{10}$  nên suy ra

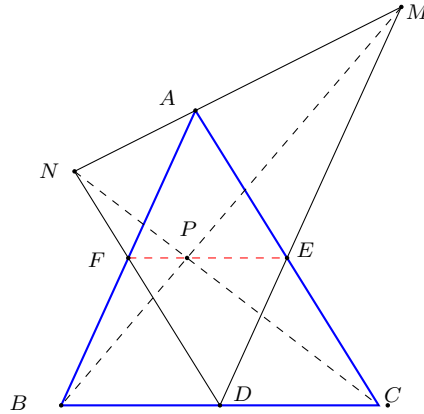
$$a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{10}^2 \leq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_9^2.$$

Tức là  $a_{10}^2 \leq a_1^2$ . Suy ra  $a_{10} \leq a_1$  vì các số đều không âm. Tức là có thể suy ra tất cả các số trong tập  $K$  bằng nhau. Cho nên  $a_j = 9a_j^2$ , hay  $a_j = 0$  hoặc  $a_j = \frac{1}{9}$ . Đáp số:

$$K = \left\{ (0, 0, \dots, 0), \left( \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{9} \right) \right\}.$$

Người đề xuất: Nguyễn Tiến Lâm. □

6. Cho tam giác  $ABC$  với  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA$  và  $AB$ . Một đường thẳng đi qua  $A$  cắt  $DE, DF$  tại  $M, N$  tương ứng. Gọi  $P$  là giao điểm của  $BN$ , và  $CM$ . Chứng minh rằng ba điểm  $E, F, P$  thẳng hàng.



Nếu  $MN$  song song với  $BC$  thì dễ thấy  $AMDB, ANDC$  là hai hình bình hành. Suy ra  $MN = BC$ , dẫn đến  $MNBC$  cũng là hình bình hành. Nên hai đường chéo  $BM, CN$  cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Suy ra  $PM = PB$ , lại có  $F$  là trung điểm  $AB$  nên  $FP$  song song với  $AM$ , dẫn đến song song với  $CD$ . Tương tự ta cũng có  $PE$  song song với  $CD$ . Từ đây kết luận được  $P, E, F$  là ba điểm thẳng hàng.



Nếu  $MN$  không song song với  $BC$  thì  $K$  là giao điểm của  $MN$  với  $EF$  (kéo dài). Gọi  $P'$  là giao điểm của  $BM$  với  $EF$ . Theo định lý Thales áp dụng cho hai tam giác đồng dạng  $KAF$  và  $KME$ , ta có

$$\frac{KE}{KF} = \frac{ME}{AF} = \frac{ME}{BF} = \frac{P'E}{P'F}.$$

Lại có  $\frac{CE}{NF} = \frac{AE}{NF} = \frac{KE}{KF}$ , suy ra

$$\frac{CE}{NF} = \frac{P'E}{P'F},$$

tức là  $P', N, C$  thẳng hàng. Suy ra  $P'$  trùng với  $P$ . Vậy nên  $P, E, F$  thẳng hàng.

Người đề xuất: Nguyễn Lê Phước, Trần Quang Hùng.

7. Xung quanh một bờ hồ hình tròn có trồng 5 cây dừa. Người ta nhận thấy rằng các độ lệch chiều cao giữa hai cây liên tiếp bất kỳ luôn bằng nhau. Chứng minh rằng cả năm cây đều có cùng chiều cao.

*Chứng minh.* Đặt  $|a - b| = |b - c| = |c - d| = |d - e| = |e - a| = k \geq 0$ , thì ta có  $a - b = \epsilon_1 k$ ,  $b - c = \epsilon_2 k$ ,  $c - d = \epsilon_3 k$ ,  $d - e = \epsilon_4 k$ ,  $e - a = \epsilon_5 k$ , với  $\epsilon_j = \pm 1$ . Cộng từng vế cho ta

$$0 = k(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5).$$

Do tổng các  $\epsilon_j$  trên là số lẻ nên từ đó suy ra  $k = 0$ , kéo theo  $a = b = c = d = e$ .

Người đề xuất: Nguyễn Tiến Lâm. □

8. Xác định tất cả các số nguyên dương  $n$  sao cho

$$\frac{7n - 12}{2^n} + \frac{2n - 14}{3^n} + \frac{24n}{6^n} = 1.$$

*Chứng minh.* Rõ ràng, nghiệm của phương trình phải là một số nguyên dương. Viết lại phương trình dưới dạng

$$(7n - 12)3^n + (2n - 14)2^n + 24n = 6^n,$$



sau khi biến đổi ta được

$$(2^n - n^2)(3^n - 2n + 14) = (3^n - 2n)(3 - n)(n - 4).$$

Giả sử  $n \in \mathbb{N}$ . Thì  $3^n = (1 + 2)^n \geq 1 + 2n$  sao cho  $3^n - 2n$  và  $3^n - 2n + 14$  đều dương.

Vì  $2^n > n^2$  đúng với mọi  $n$ , trừ với  $n = 2, 3$ , và  $4$ . Suy ra rằng nếu  $n$  lớn hơn  $4$  hoặc  $n = 1$  thì hai vế trái dấu (vế trái dương, vế phải âm). Vậy nên ta chỉ cần xét các trường hợp  $n = 2, 3, 4$ . Thử trực tiếp cho ta  $n = 4$  là nghiệm duy nhất. Đáp số:  $n = 4$ .

Người đề xuất: Michel Bataille. □